

Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse als Beitrag zur Bewertung der Zuverlässigkeit adaptronischer Struktursysteme

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt

zur

Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Soong-Oh Han

aus Rüsselsheim

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Holger Hanselka

Mitberichterstatter: Prof. Dr./Univ. de São Paulo Peter Hagedorn

Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Kai-Dietrich Wolf

Tag der Einreichung: 1. Februar 2011

Tag der mündlichen Prüfung: 13. April 2011

Darmstadt 2011

D 17

Für Christine und Julia
und alle Folgenden

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse von adaptronischen strukturdynamischen Systemen. Eine Sensitivitätsanalyse verfolgt im Allgemeinen das Ziel, den Einfluss der Systemvariablen auf die betrachtete Ausgangsgröße qualitativ und quantitativ in Form von skalaren Größen zu bewerten. Die varianzbasierten Techniken betrachten dabei explizit die Streuung der Ausgangsgröße. Somit eignen sich diese Verfahren insbesondere im Kontext von Zuverlässigkeits- und Robustheitsuntersuchungen.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine geeignete Methodik der Implementierung varianzbasierter Sensitivitätsanalysen im Zusammenhang mit der Zuverlässigkeitsbewertung adaptronischer Struktursysteme zu identifizieren. Dabei wird folgende Vorgehensweise gewählt. Anhand eines Ein-Masse-Schwinger-Systems werden grundlegende Untersuchungen der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse vorgenommen. Es werden verschiedene Ansätze der Stichprobenerstellung, unterschiedliche Berechnungsmethoden sowie konventionelle als auch neu entwickelte Verfahren der Bewertung statistischer Schätzfehler implementiert und bewertet.

Die erzielten Ergebnisse fließen in die folgende Betrachtung eines adaptronischen Kragbalkens ein. Es wird dabei in einem ersten Schritt ein analytisches Strukturmodell zugrunde gelegt und eine vollständige statistische Analyse mit den ermittelten geeigneten Verfahren durchgeführt. Weiterhin wird zur Reduzierung des Rechenaufwands eine Rastersuche und eine Metamodellierung basierend auf neuronalen Netzwerken implementiert. Entsprechend geeignete Einstellungen werden durch den Vergleich mit den Ergebnissen der vollständigen statistischen Analyse bestimmt.

Diese Ergebnisse werden zur Analyse eines numerischen Strukturmodells des Balkensystems verwendet. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes ist die Durchführung einer vollständigen Monte-Carlo-Simulation zur Berechnung der Sensitivitätsmaße nicht möglich. Es wird gezeigt, dass sich diese Problematik durch die Anwendung der zuvor besprochenen Verfahren der Rastersuche und Metamodellierung lösen lässt. Somit wird in dieser Arbeit eine adäquate Vorgehensweise aufgezeigt, womit die Durchführung varianzbasierter Sensitivitätsanalysen zur Untersuchung von komplexen adaptronischen Struktursystemen ermöglicht wird.

Abschließend wird die Anwendung der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse im Kontext einer robusten Optimierung besprochen und ein Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeiten zur Verbesserung der vorgestellten Methodik gegeben.

Abstract

The presented work addresses the variance based sensitivity analysis of smart structural dynamical systems. The general purpose of a sensitivity analysis is to identify the influence of a specified factor on the system output in a qualitative and quantitative manner. Variance based techniques explicitly consider the output variation and are applicable in a reliability and robustness analysis framework.

Main objective of this thesis is to identify a suitable methodology for the implementation of a variance based sensitivity analysis in the context of the reliability evaluation of smart structures. In a first step, considering a simple single-degree of freedom system, various sampling techniques and sensitivity analysis algorithms are compared. Furthermore, conventional as well as new approaches for the estimation of the statistical errors are implemented.

In a subsequent analysis the obtained results are employed in order to perform a sensitivity analysis of a smart structure. Here, a cantilever beam with a piezoelectric laminar actuator and sensor is considered. A complete stochastic sensitivity analysis is performed based on an analytic model of the smart structure system. In order to identify a methodology to reduce computational costs, a screening analysis and a metamodeling algorithm based on static feed-forward neural networks is implemented. Appropriate parameters of these techniques are found by comparing the results with the outcome of the complete stochastic analysis.

In a third step the previous results are used for deriving an appropriate metamodel of a numerical beam model using Finite Elements. The computational costs of a single simulation run is relatively high. Thus, a complete stochastic analysis using Monte-Carlo simulations cannot be performed in general. Therefore, the metamodeling approach is taken. The sensitivity analysis outcome of the metamodel is compared with the results obtained from the analytic model.

As a conclusion the possibility to apply variance based sensitivity analyses in a robust optimization framework is shown and a perspective of future research topics in this field is given.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Hintergrund und Ziele	1
1.2	Gliederung dieser Arbeit	3
2	Stand der Technik und Forschung	7
2.1	Terminologie und Methoden der Zuverlässigkeit	7
2.2	Strukturzuverlässigkeit adaptronischer Systeme	9
2.3	Lokale und globale Verfahren der Sensitivitätsanalyse	10
2.4	Modellierung und Sensitivitätsanalyse adaptronischer Systeme	13
3	Grundlagen	17
3.1	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie	17
3.2	Varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse	19
3.2.1	Sensitivitätsmaße	19
3.2.2	Berechnungsmethoden	25
3.3	Konfidenzintervalle mit Bootstrap-Resampling	34
3.4	Rastersuche nach Morris	35
3.5	Neuronale Netzwerke	37
4	Bewertung der statistischen Schätzfehler	41
4.1	Vergleich unterschiedlicher Berechnungsmethoden	41
4.2	Konfidenzintervalle und Standardfehler	42
4.3	Bewertung der stochastischen Konvergenz	43
4.4	Funktionale stochastische Verschiebung	45
5	Sensitivitätsanalyse eines Ein-Masse-Schwingers	49
5.1	Systemformulierung	49
5.2	Sensitivitätsanalyse	51
5.2.1	Statistische Schätzung der Sensitivitätsmaße	53
5.2.2	Spektrale Berechnungsverfahren	56
5.3	Untersuchung der Schätzfehler	62
5.3.1	Beurteilung der stochastischen Konvergenz	62
5.3.2	Analyse des Streuverhaltens mit Bootstrap-Resampling	64
5.3.3	Funktionale stochastische Verschiebung	66

5.4	Konventionelle Verfahren der Sensitivitätsanalyse	68
5.5	Zwischenergebnisse	72
6	Sensitivitätsanalyse eines adaptronischen Kragbalkens	75
6.1	Analytische Modellbildung	77
6.1.1	Strukturmodellierung	77
6.1.2	Positive-Position-Feedback-Regelung	80
6.1.3	Bewegungsgleichungen und Ausgangsgrößen	81
6.1.4	Stochastische Beschreibung der Eingangsparameter	82
6.1.5	Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse	83
6.1.6	Bewertung der Approximationsgüte	85
6.1.7	Morris-Screening	88
6.1.8	Metamodellierung mit künstlichen neuronalen Netzen	90
6.2	Finite-Elemente-Modellierung	93
6.2.1	Strukturmodellierung	93
6.2.2	Modellreduktion	95
6.2.3	Simulation des aktiven Systems	97
6.2.4	Morris-Screening	98
6.2.5	Metamodellierung und Sensitivitätsanalyse	101
7	Zusammenfassung und Ausblick	105
7.1	Wesentliche Ergebnisse	105
7.2	Anwendung in der Strukturoptimierung	111
7.3	Bestehender Forschungsbedarf	113
A	Globale Sensitivitätsanalyse	115
A.1	Systemmodellierung	116
A.2	Beschreibung der Streuung	116
A.3	Auswahl der Methodik	117
A.3.1	Untersuchungsmethode	117
A.3.2	Zufallszahlengenerator	118
A.3.3	Berechnungsverfahren	118
A.4	Erstellung der Stichprobe	120
A.5	Simulation	121
A.6	Sensitivitätsanalyse	122
A.6.1	Berechnung der Sensitivitätsmaße	122
A.6.2	Fehleranalyse	122
B	Analytische Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße	125
B.1	Sobol'-G-Funktion	125

B.2 Analytische Berechnung	125
C Monte-Carlo-Sampling	129
C.1 Pseudozufallszahlen	129
C.2 Latin-Hypercube-Sampling	130
C.3 Quasizufallszahlen	130
C.4 Diskrepanz als Gütekriterium einer Stichprobe	131
C.5 Vergleich verschiedener Samplingtechniken	131
D Beispiel Bootstrap-Resampling	133
Abkürzungsverzeichnis	135
Bilderverzeichnis	137
Tabellenverzeichnis	139
Literaturverzeichnis	141

1 Einleitung

1.1 Hintergrund und Ziele

Die Zuverlässigkeitsanalyse adaptronischer Systeme bildet einen Forschungsschwerpunkt am Fachgebiet Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM an der Technischen Universität Darmstadt. Ein adaptronisches Struktursystem wird durch eine strukturkonforme Integration von Aktoren und Sensoren auf der Basis von multifunktionalen Werkstoffen charakterisiert. Aktoren und Sensoren werden dabei über eine geeignete Regelung miteinander verknüpft [40]. Wesentliches Merkmal der Adaptronik ist die Erweiterung der Funktionalität passiver Strukturen, indem eine gezielte Veränderung der mechanischen Lasten herbeigeführt wird.

Ein Anwendungsgebiet für adaptronische Systeme bildet zum Beispiel die aktive Unterdrückung von Schwingungen. Dabei werden Resonanzschwingungen der Strukturelemente durch den aktorischen Einsatz multifunktionaler Materialien, beispielsweise Piezokeramiken, verhindert und die resultierenden mechanischen Lasten reduziert. Die Funktionalität der adaptronischen Komponenten wirkt sich somit unmittelbar auf die Lebensdauer und die Zuverlässigkeit der Struktur aus.

Die Wechselwirkungen zwischen Strukturbauteilen, Sensoren, Regelung und Aktoren erschweren dabei die Beurteilung der Systemzuverlässigkeit. Konventionelle Verfahren der Zuverlässigkeitsanalyse, die auf den Überlebenswahrscheinlichkeiten einzelner Bauteile oder auf der Wahrscheinlichkeitsberechnung diskreter Systemzustände basieren, können diese Wechselwirkungsbeziehungen nicht abbilden.

In der aktuellen Fachliteratur wird eine neue Methodik, die varianzbasierte Sensitivitätsanalyse [87], vielfach diskutiert. Ziel der zugehörigen Verfahren ist es, den Einfluss der Variablen auf die Abweichung der Ausgangsgröße vom Sollwert quantitativ zu erfassen. Mit geeigneten Bewertungsgrößen wird dabei der Anteil einzelner Parameter an der gesamten Streuung evaluiert. Zur Berechnung dieser Sensitivitätsmaße werden stochastische Simulationen eines mathematischen Modells durchgeführt. Ein Vorteil der Methodik besteht dabei in der Unabhängigkeit vom Modellverhalten. Demzufolge wird eine quantitative Analyse des Streuverhaltens komplexer nichtlinearer Systeme ermöglicht.

Die varianzbasierte Sensitivitätsanalyse bildet daher einen vielversprechenden Ansatz, die Systemzuverlässigkeit einer adaptronischen Struktur, bei Berücksichtigung der komplexen Wechselwirkungen, angemessen zu bewerten. Dabei wird ein Simulationsmodell

des geregelten gesamten Systems benötigt und als Ausgangsgröße die entsprechende Funktionalität, beispielsweise die innerhalb eines definierten Frequenzbereichs erzielte Schwingungsreduktion, betrachtet.

In diesem Kontext wurden in vorangegangenen Forschungsarbeiten entsprechende Verfahren der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse zur Bewertung eines aktiven Ölwanne-systems mit Piezopatchaktoren und -sensoren [36, 58] sowie eines Trägersystems zur aktiven Schwingungsminderung mit Piezostackaktoren [37, 38, 39] eingesetzt.

Die Strukturmodellierung erfolgte mit der Finite-Elemente-Methode. Zur Abbildung des geschlossenen Regelkreises wurde die hohe Anzahl an Strukturfreiheitsgraden mit einem modal unabhängigen Reduktionsansatz verringert. Die reduzierten Bewegungsgleichungen des Systems und der Regelungsalgorithmus wurden in geeigneter Software abgebildet. Im Fall der aktiven Ölwanne wurde zur weiteren Reduzierung des Rechenaufwands mittels statistischer Versuchsplanung ein Regressionsmodell (Metamodell) der Struktur abgeleitet. Die stochastischen Simulationen erfolgten somit anhand des Approximationsmodells.

Eine abschließende Beurteilung über die Eignung dieser Methodik konnte allerdings nicht erfolgen, da die Ergebnisse nicht konsistent waren. Beispielsweise wurden teilweise eindeutig nichtrelevante Variablen als signifikant bewertet. Weitere Fehler bestanden in der Beurteilung von Parametern, die baugleichen Elementen des Systems (z. B. Steifigkeiten der sechs symmetrisch angeordneten Elastomerdämpfer im adaptronischen Trägersystem) zuzuordnen waren. Die dabei erwarteten identischen Einflüsse wurden nicht adäquat identifiziert.

Mögliche Ursachen sind durch eine unzureichende Approximationsgüte des Regressionsmodells, eine ungenügende Stichprobenauswahl und -größe und fehlerbehaftete Verfahren zur Berechnung der Sensitivitätsmaße gegeben. Die Plausibilitätsbewertung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse wird jedoch in der Fachliteratur vernachlässigt. Gleichzeitig ist der Rechenaufwand aufgrund der Komplexität der Simulationsmodelle adaptronischer Systeme hoch, sodass eine Vergrößerung der Datenbasis mittels zusätzlicher Simulationen in der Regel nicht umsetzbar ist. Im Rahmen der genannten Arbeiten konnten die grundlegenden Fragestellungen der Fehlerbewertung nicht geklärt werden.

Der sich hieraus ergebende Forschungsbedarf bildet somit die Voraussetzung und Motivation der vorliegenden Arbeit. Es lassen sich drei grundlegende Ziele formulieren, die gleichzeitig den wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn dieser Arbeit darstellen.

1. Fehler- und Plausibilitätsbewertung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse

Konventionelle Verfahren, beispielsweise die Angabe von Vertrauensbereichen, die in der Fachliteratur im Sinne einer Fehlerbewertung eingesetzt werden, sollen im Rahmen dieser

Arbeit implementiert und bewertet werden. Zusätzlich werden neue Ansätze, die Betrachtung des Konvergenzfehlers und eine quantitative Fehlerberechnung mittels zusätzlicher stochastischer Variablen, eingeführt und diskutiert.

2. Vergleich unterschiedlicher Verfahren der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse

Es werden anhand eines einfachen dynamischen Struktursystems verschiedene Ansätze der Stichprobengenerierung und der Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße gegenübergestellt. Als Resultat soll eine geeignete Methodik zur Untersuchung komplexer dynamischer Systeme mit hohem Rechenaufwand identifiziert werden.

3. Reduzierung des Rechenaufwands zur Analyse von Modellen adaptronischer Struktursysteme

Die Ergebnisse werden zur Untersuchung eines adaptronischen Systems übernommen. Die Komplexität der Simulationsmodelle adaptronischer Strukturen führt im Allgemeinen zu einem hohen Rechenaufwand. Um diesen zu reduzieren werden zwei Verfahren, eine Rastersuche zur Verringerung der Anzahl an Variablen und neuronale Netzwerke zur Generierung eines Approximationsmodells, implementiert und bewertet.

Die übergeordnete Zielsetzung dieser Arbeit besteht somit in der Identifizierung und Umsetzung einer geeigneten Methodik zur Durchführung varianzbasierter Sensitivitätsanalysen. Dabei wird ein Schwerpunkt auf die Untersuchung strukturmechanischer Modelle adaptronischer Systeme und die Bewertung möglicher Fehler gelegt.

1.2 Gliederung dieser Arbeit

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. In **Kapitel 2** wird der aktuelle Stand der Technik und Forschung hinsichtlich der für diese Arbeit relevanten Themenbereiche vorgestellt und diskutiert. Im ersten Abschnitt wird eine kurze Übersicht über die in der Zuverlässigkeitstechnik verwendeten Begriffe und Methoden gegeben. Daraufhin werden aktuelle Arbeiten anderer Wissenschaftler zur Untersuchung der Strukturzuverlässigkeit adaptiver Systeme besprochen.

Es wird eine ausführliche Übersicht über die Verfahren der globalen Sensitivitätsanalyse gegeben, welche in den vergangenen Jahren intensiv erforscht wurden. Dies wird durch eine Vielzahl an entsprechenden Publikationen verdeutlicht. Die varianzbasierte Sensitivitätsanalyse stellt ein derartiges globales Verfahren dar. Hierzu werden sowohl die grundlegenden Arbeiten als auch einige ausgewählte Anwendungsbeispiele vorgestellt, die den in dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen ähnlich sind.

Die Durchführung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse basiert auf einer Modellbildung des zu untersuchenden Systems. Daher wird der Stand der Forschung bezüglich

der Modellierung und der Sensitivitätsanalyse adaptronischer Strukturen mit piezokeramischen Aktoren und Sensoren ebenfalls dargestellt.

In **Kapitel 3** werden die zum Verständnis der implementierten Verfahren benötigten theoretischen Grundlagen dargelegt. Dabei erfolgt lediglich eine knappe Beschreibung der wesentlichen Zusammenhänge. Bei Bedarf einer ausführlichen und didaktisch bewährten Behandlung der Themenbereiche wird auf weiterführende Texte verwiesen.

Hiervon ausgenommen ist die Darstellung der mathematischen Zusammenhänge und Herleitung der varianzbasierten Sensitivitätsmaße. Diese werden in keiner bekannten Publikation zusammenhängend ausführlich behandelt, sodass in dieser Arbeit eine detaillierte Beschreibung vorgenommen wird.

Weiterhin wird das Prinzip des Bootstrap-Resamplings vorgestellt, welches in der Literatur der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse die Grundlage für die Angabe von Konfidenzintervallen bildet. Im nächsten Abschnitt werden die implementierten Verfahren einer Rastersuche und neuronaler Netzwerke besprochen. Zielsetzung beider Techniken ist es, den Rechenaufwand zu reduzieren, indem zum einen die Anzahl zu berücksichtigender Variablen reduziert und zum anderen das Simulationsmodell über ein Metamodell approximiert wird.

Möglichkeiten der Fehlerabschätzung innerhalb varianzbasierter Sensitivitätsanalysen werden in **Kapitel 4** besprochen. Einige in der bekannten Literatur angewendete Verfahren werden diskutiert und zwei neue, im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methoden einer quantitativen Fehlerapproximation vorgestellt.

Das erste Verfahren basiert auf der Betrachtung der stochastischen Konvergenz, wobei ein angemessenes Fehlermaß vorgestellt wird. Der zweite Ansatz beruht auf einer funktionalen Erweiterung des betrachteten Simulationsmodells und der Einführung zusätzlicher Zufallsvariablen, wobei die Form der Erweiterungsfunktion so zu wählen ist, dass die Sensitivitätsmaße der Zusatzparameter semianalytisch zu berechnen sind. Ein quantitatives Fehlermaß wird somit aus der Differenz der statistischen Schätzung und der semianalytischen Lösung gebildet. Beide neuen Verfahren der Fehlerapproximation sollen dabei ohne zusätzliche Simulationsdurchläufe auskommen, sodass der Rechenaufwand sich nicht wesentlich erhöht.

Als erstes einfaches Beispiel eines dynamischen Struktursystems wird in **Kapitel 5** ein Ein-Masse-Schwinger mit Fußpunkterregung betrachtet. Anhand dieses Systems sollen die in Kapitel 2 und 3 vorgestellten verschiedenen Verfahren zur Durchführung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse implementiert und miteinander verglichen werden. Weiterhin werden die in Kapitel 4 diskutierten Methoden der Fehlerabschätzung angewendet und bewertet. Zielsetzung dieses Kapitels ist es, geeignete Verfahren der Stichprobengenerierung, Berechnung der Sensitivitätsmaße und Fehlerabschätzung zur Analyse dynamischer Kenngrößen zu identifizieren.

Diese Ergebnisse werden zur Untersuchung eines adaptronischen Systems (**Kapitel 6**), einer Balkenstruktur mit applizierten Piezopatchsensoren und -aktoren und integrierter Positive-Position-Feedback-Regelung, herangezogen. In einem ersten Schritt wird eine vollständige statistische Analyse mit den zuvor als geeignet bewerteten Methoden anhand eines analytischen Modells des Struktursystems durchgeführt. Die vorgestellten Verfahren der Rastersuche und der neuronalen Netzwerke zur Reduzierung des Rechenaufwands werden eingesetzt und anhand der Ergebnisse der vollständigen statistischen Analyse bewertet. Die hier identifizierten geeigneten Einstellungen werden weiterhin zur Untersuchung eines numerischen Modells des Kragbalkensystems herangezogen.

Das numerische Modell, bestehend aus mehreren tausend Freiheitsgraden, entzieht sich aufgrund langer Berechnungszeiten (gemessen an den in dieser Arbeit zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten) einer vollständigen statistischen Untersuchung, sodass die Implementierung von Maßnahmen zur Reduzierung der Rechenkosten notwendig ist. Es wird eine entsprechende Rastersuche und varianzbasierte Sensitivitätsanalyse anhand eines mit neuronalen Netzen identifizierten Metamodells durchgeführt. Weiterhin werden die berechneten Sensitivitätsmaße des numerischen und des analytischen Modells miteinander verglichen.

Abschließend werden in **Kapitel 7** die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Der verbleibende Forschungsbedarf wird beschrieben und Möglichkeiten der Weiterentwicklung der dargestellten Methodik werden diskutiert. Dabei wird auch auf die theoretischen Grundlagen der Anwendung im Rahmen von Optimierungsaufgaben eingegangen.

Im **Anhang** werden einige für das Verständnis der Arbeit relevante und grundlegende Aspekte näher beschrieben. In **Kapitel A** wird der prinzipielle Ablauf einer globalen Sensitivitätsanalyse anschaulich dargestellt. Dabei werden verwendete Fachbegriffe im Kontext erläutert. Die Vorgehensweise der analytischen Berechnung der in dieser Arbeit betrachteten Bewertungsmaße wird in **Kapitel B** vorgestellt. Als Beispiel wird eine in der Literatur oft verwendete Testfunktion untersucht. Grundlegend für die Durchführung stochastischer Simulationen ist die Erstellung von Stichproben mit Zufallszahlen. Die verschiedenen Ansätze zur Generierung dieser Zufallszahlen werden in **Kapitel C** diskutiert. Abschließend wird in **Kapitel D** ein Beispiel zur Erstellung von Bootstrap-Resamples gegeben. Diese werden in der vorliegenden Arbeit zur Berechnung von Vertrauensbereichen eingesetzt.

2 Stand der Technik und Forschung

In diesem Kapitel wird der aktuelle Stand der Technik und Forschung der für die vorliegende Arbeit relevanten Themenbereiche dargestellt. Dabei wird eine Gliederung in vier Abschnitte vorgenommen. Zuerst wird auf verschiedene Definitionen der verwendeten Terminologie eingegangen und eine Klassifizierung verfügbarer Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse technischer Systeme vorgestellt. Weiterhin wird auf die spezielle Zuverlässigkeitsbewertung adaptronischer Struktursysteme eingegangen. Im dritten Abschnitt werden Verfahren der Sensitivitätsanalyse beschrieben, die auch im Rahmen dieser Dissertation implementiert und untersucht worden sind. Abschließend werden aktuelle Verfahren zur Modellierung, Optimierung und Sensitivitätsanalyse adaptronischer Strukturen vorgestellt.

2.1 Terminologie und Methoden der Zuverlässigkeit

Der Begriff der Zuverlässigkeit repräsentiert eine technische Eigenschaft von Produkten. Dabei wird im allgemeinen Sprachgebrauch, aber auch in der Fachliteratur der Begriff nicht einheitlich verwendet [89]. Nach dem heutigen Stand der Technik existieren keine eindeutigen widerspruchsfreien Definitionen der in der Zuverlässigkeitstechnik verwendeten Fachausdrücke. Beispielsweise wird der Begriff Zuverlässigkeit in einigen Lehrbüchern [7, 8] im Sinne einer Überlebenswahrscheinlichkeit definiert. In der VDI Richtlinie 4001 [102], die der internationalen Norm IEC 60050-191 [50]¹ entspricht, findet sich eine allgemeinere Begriffsauffassung: „*Zusammenfassender Ausdruck zur Beschreibung der Verfügbarkeit und ihrer Einflussfaktoren Funktionsfähigkeit, Instandhaltbarkeit und Instandhaltungsbereitschaft*“. Diese sprachliche Ungenauigkeit wird wesentlich verursacht durch semantische Unterschiede der im Englischen und Deutschen verwendeten entsprechenden Fachterme. Daher werden in dieser Arbeit zur klaren Differenzierung bei Bedarf die englischen Ausdrücke verwendet und gegebenenfalls erläutert.

Inhaltlich präziser lässt sich die Zuverlässigkeitstechnik darstellen, indem eine Klassifizierung der angewendeten Methoden vorgenommen wird. Eine Einteilung erfolgt in Anlehnung an [7] (Bild 2.1). Es wird grundsätzlich unterschieden zwischen qualitativen und quantitativen Verfahren. Qualitative Methoden haben die Aufgabe, systematisch

¹Hier wird der englische Begriff „dependability“ mit „Zuverlässigkeit“ übersetzt.

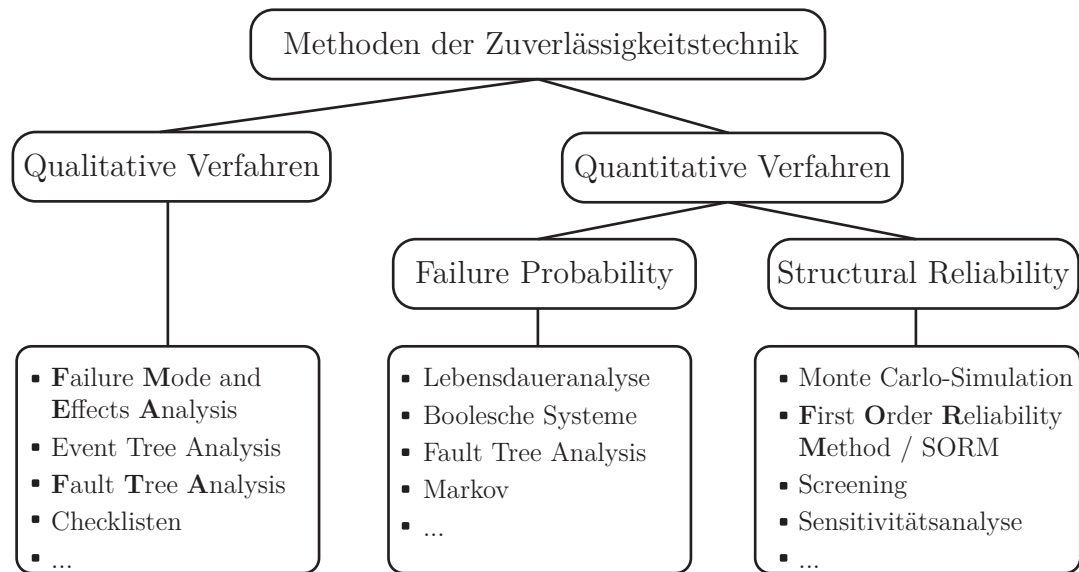


Bild 2.1: Klassifizierung der Methoden der Zuverlässigkeitstechnik

und strukturiert anhand von Formblättern und festgelegten Prozessdefinitionen und -abläufen Fehlerursachen und deren Folgen zu identifizieren und einer Bewertung zu unterziehen. Dabei ist Expertenwissen notwendig. Quantitative Verfahren untergliedern sich wiederum in zwei Bereiche. Eine Gruppe an Methoden wird angewendet, um zeitabhängige Ausfallwahrscheinlichkeiten (Failure Probability) von Bauteilen und Systemen zu berechnen. Die zugrunde liegenden Dichtefunktionen der Ausfallwahrscheinlichkeiten werden über Lebensdauertests bei definierten Rand- und Umgebungsbedingungen ermittelt. Wenn eine experimentelle Umsetzung nicht möglich ist und keine entsprechenden Lebensdauerdaten verfügbar sind, so müssen diese Dichtefunktionen mittels geeigneter Annahmen, beispielsweise aus Erfahrungswerten, approximiert werden. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Systems, bestehend aus diversen Elementen mit jeweiliger Ausfall-dichtefunktion, lässt sich beispielsweise mit der Booleschen Systemtheorie oder über eine Markov-Prozess-Modellierung berechnen.

Im Gegensatz hierzu betrachten die Verfahren der Structural Reliability [56, 68] (im Folgenden soll als synonyme Begriff der Ausdruck Strukturzuverlässigkeit verwendet werden) Streuungen physikalischer Größen (Geometrie, Material etc.), die meist als zeitlich invariant angenommen werden. Anhand eines geeigneten Rechenmodells wird die Zielgröße berechnet und eine Grenzfunktion bestimmt, die den möglichen Wertebereich in zulässige und unzulässige Gebiete aufteilt. Die Zuverlässigkeit des Systems berechnet sich, unter Berücksichtigung der zugeordneten Dichtefunktionen der Eingangsparameter, somit als Wahrscheinlichkeit, dass die betrachtete Zielgröße einen Wert in einer zulässigen Region einnimmt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird grundsätzlich diese Begriffsauffassung der Strukturzuverlässigkeit zugrunde gelegt.

Eine analytische Berechnung der Strukturzuverlässigkeit lässt sich über eine modellbasierte Approximation der Grenzfunktion ableiten. Hierbei wird zwischen linearen Ansätzen (**F**irst **O**rder **R**eliability **M**ethod, FORM) und Verfahren höherer Ordnung (**S**econd **O**rder **R**eliability **M**ethod, SORM) unterschieden [68]. Im Allgemeinen sind jedoch die entstehenden Integralterme lediglich über Monte-Carlo-Simulationen zu lösen [65].

Derartige stochastische Methoden werden, begünstigt durch die Entwicklung der Rechnertechnologie, vermehrt zur Lösung unterschiedlicher technischer Fragestellungen eingesetzt [32, 71]. Dabei steigt der Rechenaufwand, abhängig von der Methode auch exponentiell, mit der Anzahl der berücksichtigten Parameter an und schränkt die Anwendbarkeit bezüglich aufwendiger numerischer Simulationsmodelle, wie sie in den Ingenieurwissenschaften oft eingesetzt werden, ein.

Zur Umgehung dieser Problematik können, ausgehend von den ursprünglichen Simulationsmodellen, Ersatzmodelle (Metamodelle) [41, 54] mit geringerer Komplexität abgeleitet oder die Anzahl der Eingangsgrößen über eine Rastersuche [70] verringert werden. Eine Vielzahl an Forschergruppen beschäftigt sich mit der Untersuchung und Entwicklung effizienter Algorithmen zur Erstellung von Metamodellen. Exemplarisch seien hier [20] und [76] genannt. Die Approximation der Grenzfunktion erfolgt dabei basierend auf einer Funktionalzerlegung in Terme aufsteigender Ordnung (High Dimensional Model Representation) [20] oder einer modalen Darstellung der Bewegungsgleichungen [76].

2.2 Strukturzuverlässigkeit adaptronischer Systeme

Die Zuverlässigkeitsbewertung adaptronischer Struktursysteme stellt ein noch wenig erforschtes Gebiet dar. Wesentlicher Grund hierfür ist, dass keine kommerziell weit verbreitete Anwendung dieses neuartigen Technologiebereichs existiert. Somit sind weder statistisch verwertbare Ausfall- und Felddaten, typische Ausfallmechanismen, noch entsprechendes Expertenwissen bezüglich einer zuverlässigen Konstruktion adaptronischer Systeme hinreichend in der Fachliteratur dokumentiert.

Aus dem Methodenbereich der Strukturzuverlässigkeit existieren einige Ansätze zur Bewertung aktiver und adaptronischer Struktursysteme, die im Folgenden vorgestellt werden. In [97] wird ein aktives Ein-Masse-Schwinger-System mit unterschiedlichen Regelalgorithmen und streuenden Eingangsparametern untersucht. Die Grenzfunktion zwischen instabilem und stabilem Bereich wird dabei funktional approximiert (FORM und SORM). Die entsprechende Strukturzuverlässigkeit, hier die Wahrscheinlichkeit der Stabilität des Systems, wird analytisch berechnet. Anhand eines einfachen aktiven Referenzsystems wird somit die Vorgehensweise zur Bestimmung der Strukturzuverlässigkeit und deren Eignung zur Bewertung der Robustheit verschiedener Systemkonfigurationen veranschaulicht. Die Anwendbarkeit dieser Vorgehensweise beschränkt sich allerdings auf

die Untersuchung von Systemgrößen, die anhand einfacher funktionaler Zusammenhänge beschrieben werden können.

Eine allgemeine Systematik zur Zuverlässigkeitsbewertung von adaptronischen Struktursystemen wird in [42, 43] vorgestellt. Hierbei wird jede mögliche Fehlfunktion qualitativ über eine Fehlerbaumanalyse erfasst und es wird jeweils eine entsprechende Grenzfunktion zugewiesen. Als Beispielsystem wird ein starres Tragwerk, ausgestattet mit Sensoren und magnetorheologischen Dämpfern, untersucht. Allerdings wird auf die Berechnung der Strukturzuverlässigkeit, das heißt die Lösung der entsprechenden hochdimensionalen Integralterme, verzichtet. Eine Analyse der spezifischen Fragestellungen bei der Bestimmung der Strukturzuverlässigkeit adaptronischer Systeme findet somit nicht statt.

Zusammenfassend lässt sich aus den bekannten Publikationen nicht allgemein ableiten, ob konventionelle Methoden der Strukturzuverlässigkeit für eine Bewertung adaptronischer Systeme geeignet sind. Für den Fall strukturintegrierter piezokeramischer Aktoren appliziert auf einfache Teststrukturen, soll diese Arbeit im Zusammenhang mit globalen Methoden der Sensitivitätsanalyse einen wesentlichen Beitrag leisten.

2.3 Lokale und globale Verfahren der Sensitivitätsanalyse

Im Allgemeinen wird zwischen lokalen und globalen Verfahren der Sensitivitätsanalyse unterschieden. Wesentliches Merkmal lokaler Sensitivitätstechniken ist die Betrachtung örtlich begrenzter Antwortgrößen eines Systems bei geringer Veränderung einzelner Eingangsgrößen (**O**ne-**A**t-a-**T**ime-Versuche, OAT). Als Bewertungsmaß werden intuitiv verständlich Differenzen- und Differentialquotienten, teilweise in normierter Form, herangezogen.

Die mathematischen Grundlagen wurden intensiv in den 1980er Jahren [12, 13], insbesondere im Rahmen der Nuklearforschung, erarbeitet. Ein detaillierter Überblick der wesentlichen Publikationen wird in [101] dargestellt. Seitdem werden derartige lokale Verfahren der Sensitivitätsanalyse in vielen unterschiedlichen Fachdisziplinen, beispielsweise auch in der Strukturmechanik zur Optimierung numerischer Systemmodelle [18, 19, 34], eingesetzt. Eine Implementierung in kommerzielle Software ist beispielsweise in der Finite-Elemente-Software ANSYS [2] zu finden. Dabei wird zur Berechnung der benötigten Sensitivitätsmaße das Finite-Differenzen-Verfahren eingesetzt.

Wesentliche Nachteile dieser Techniken bestehen in der lokal eingeschränkten Betrachtung, der fehlenden Möglichkeit, Wechselwirkungen zwischen mehreren Einflussparametern zu identifizieren und den mathematischen Anforderungen der Stetigkeit und Diffe-

renzierbarkeit der Antwortgrößen. Diese werden bei der Analyse dynamischer Systeme bei Berücksichtigung diskret und kontinuierlich streuender Parameter im Allgemeinen nicht erfüllt.

Globale Verfahren der Sensitivitätsanalyse² setzen hingegen keine Einschränkung des berücksichtigten Parametergebiets der Eingangsgrößen voraus. Die zugehörigen Sensitivitätsmaße werden anhand des gesamten Werteraums der Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnet.

Ein einfaches globales Verfahren basiert auf der grafischen Darstellung und Analyse mittels Scatterplots. Die Auswirkung einzelner variierender Eingangsgrößen lässt sich qualitativ bestimmen, Wechselwirkungseffekte können in der Regel allerdings nicht identifiziert werden. Gleichzeitig nimmt die Übersichtlichkeit mit einer zunehmenden Anzahl an Parametern deutlich ab. Weitere konventionelle globale Verfahren basieren auf Monte-Carlo-Simulationen und entsprechenden Regressions- und Korrelationsanalysen, wobei als Bewertungsmaße die entsprechenden Regressions- und Korrelationskoeffizienten herangezogen werden. Die Aussagegüte hängt allerdings stark vom Verhalten des untersuchten Systemmodells ab. Ist eine nahezu lineare oder zumindest monotone Abhängigkeit zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen gegeben, welches beispielsweise durch ein hohes Bestimmtheitsmaß aufgezeigt wird, so werden dominante Faktoren quantitativ identifiziert. Eine Übersicht über diese herkömmlichen grafischen und nichtgrafischen Methoden wird in [44] dargestellt.

In einigen nichtgrafischen globalen Ansätzen [24, 48, 49, 55] wird eine Varianzanalyse der betrachteten Ausgangsgröße als Grundlage zur Bewertung der Sensitivität zugrunde gelegt. Dabei wird der jeweilige Einfluss einzelner Faktoren, ausgedrückt durch bedingte Varianzen bezogen auf die Gesamtvarianz, auf das Streuverhalten des Systems berechnet. Der direkte Einfluss eines Parameters wird dabei über den sogenannten Haupteffekt wiedergegeben. Wechselwirkungseffekte werden über den Totaleffekt quantifiziert.

Diese Bewertungsmaße basieren auf der Dekomposition der Varianz (**A**nalysis of **V**ariance, ANOVA), was im Kontext einer statistischen Versuchsplanung (**D**esign of **E**xperiments, DoE) [10, 69] ebenfalls durchgeführt wird. Der wesentliche Vorteil dieser Bewertungsgrößen liegt in der Unabhängigkeit vom Modellverhalten des zu analysierenden Systems [83]. Somit können, im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen Methoden, adäquate quantitative Sensitivitätsmaße auch bei nichtlinearen und nicht stetigen Zusammenhängen berechnet werden.

Eine unmittelbare Berechnung der Haupt- und Totaleffekte über direkte Monte-Carlo-Samplingstrategien (Auswahl der Stichprobe) ist allerdings lediglich für rechnerisch einfache Modelle mit wenigen Eingangsparametern mit vertretbarem Aufwand durchzu-

²Der allgemeine Ablauf einer globalen Sensitivitätsanalyse wird in Anhang A (S. 115 ff.) anschaulich beschrieben. Gleichzeitig werden verwendete Fachbegriffe im Kontext erläutert.

führen. In der Vergangenheit wurden daher effizientere Samplingmethoden entwickelt. Dabei haben sich zwei Ansätze, spektrale und statistische Verfahren, durchgesetzt. Im ersten Ansatz wird jeder berücksichtigten Eingangsgröße eine charakteristische Frequenz zugewiesen. Damit wird der Parameterraum möglichst füllend mithilfe einer periodischen Funktion abgefahren und mit einer adäquaten Abtastrate werden die Werte der Stichprobe bestimmt. Die Berechnung der Sensitivitätsmaße erfolgt im Rahmen einer nach den Simulationen durchzuführenden Fourieranalyse (**F**ourier **A**mplitude **S**ensitivity **T**est, FAST). Grundlegende Arbeiten zur Berechnung des Haupteffekts wurden hierzu in [24, 25, 26, 55] veröffentlicht. Eine Erweiterung zur Analyse von Wechselwirkungseffekten wird in [83] beschrieben. Einige aktuelle Publikationen beschäftigen sich mit effizienteren Strategien zur Abdeckung des Parameterraums [63, 100].

Der zweite Ansatz zur Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße beruht auf einer Erweiterung der Verfahren der statistischen Versuchsplanung auf numerische Experimente und der Dekomposition der Varianz in anteilige Terme mit steigender Dimensionalität [95]. Dabei kann die Anzahl zu berechnender Ausdrücke auf einen einzelnen Integralterm reduziert werden, welcher mit einer geeigneten Monte-Carlo-Approximation mittels Latin-Hypercube-Sampling oder Quasi-Zufallszahlen berechnet werden kann. In der jüngeren Vergangenheit wurden hierzu verschiedene Strategien zur effizienten Stichprobenauswahl vorgestellt [46, 52, 84, 99]. Ein Vergleich der Methoden zur Bestimmung des Totaleffekts wird in [85] anhand verschiedener Testmodelle diskutiert, wobei eine Empfehlung bezüglich des Ansatzes in [52] ausgesprochen wird.

Mit dem Ziel, die einschränkende Betrachtung der Varianz aufzuheben, beschäftigen sich einige wissenschaftliche Arbeiten mit der Analyse momentenunabhängiger globaler Bewertungsgrößen [9, 21, 60], wobei beispielsweise der zu erwartende Unterschied zwischen dem Integral der unbedingten und der bedingten betrachteten Dichtefunktion [9] oder Verteilungsfunktion [60] der Antwortgröße miteinander verglichen wird. Die Reduzierung des Rechenaufwands mittels angepasster Samplingstrategien ist ebenfalls Bestandteil aktueller Forschungsarbeiten [59].

Die beschriebenen varianzbasierten globalen Verfahren der Sensitivitätsanalyse bieten sich im Allgemeinen aufgrund ihrer Unabhängigkeit vom untersuchten Modellverhalten an, komplexe Systeme der Strukturodynamik und ihrer Ausgangsgrößen zu analysieren und adäquat zu bewerten. Allerdings werden in den methodenorientierten Publikationen die Möglichkeiten dieser Verfahren meist an rein akademischen Testmodellen validiert. Einige wenige Anwendungsbeispiele globaler Sensitivitätsanalysen technischer Systeme werden in [90, 109] vorgestellt. Varianzbasierte Analysen mittels FAST werden in [90] zur Untersuchung zweier Modelle bestehend aus einem Kalman-Filter zur Berechnung der Kinematik sich bewegender Objekte, wie sie in GPS-Geräten zur Positionsbestimmung eingesetzt werden, angewendet. Zur Analyse der Dynamik von Turbogeneratoren,

bestehend aus mehreren Turbinen, einem Generator und einer mehrfach auf einer Trägerstruktur gelagerten Welle, wird ein entsprechendes Finite-Elemente-Modell in [109] vorgestellt. Ziel der implementierten Sensitivitätsanalyse ist es, den Einfluss der vielen Designvariablen auf das modale Verhalten der gesamten Struktur zur Vermeidung von Resonanzdurchläufen quantitativ zu bestimmen. Dabei werden mittels eines qualitativen Screening-Verfahrens [70] irrelevante Parameter identifiziert und anschließend die Haupt- und Totaleffekte der verbliebenen Faktoren durch eine FAST-Analyse berechnet.

Diese genannten Anwendungsbeispiele bestätigen das große Potenzial globaler Sensitivitätsanalysen. Allerdings bleiben grundlegende Fragen zur Implementierung von Modellen komplexer Struktursysteme unbeantwortet, woraus sich der Forschungsbedarf für diese Arbeit ergibt. Beispielsweise sind keine Verfahren zur Abschätzung des Konvergenzverhaltens und des Approximationsfehlers, bedingt durch die verschiedenen verfügbaren Verfahren, bekannt. Diese sind jedoch für das Ziel einer quantitativen Systembewertung unerlässlich. Weiterhin ist der Einfluss der Modellierung des untersuchten Systems auf die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse von großem Interesse. Neben der numerischen Abbildung der Struktur mit der Finite-Elemente-Methode werden beispielsweise zur gekoppelten Simulation adaptronischer Systeme multiphysikalische Materialeigenschaften berücksichtigt und eine Modellreduktion implementiert. Die Auswirkungen des zusätzlichen Modellierungsaufwands und der hierfür verfügbaren unterschiedlichen Verfahren und Parameter auf das Sensitivitätsverhalten des Systems sind vollkommen unbekannt. Mit der Klärung dieser Fragen beschäftigt sich diese Arbeit.

2.4 Modellierung und Sensitivitätsanalyse adaptronischer Systeme

Die Aussagekraft simulationsbasierter Verfahren der Sensitivitätsanalysen hängt grundsätzlich von der Modellierungsgüte des untersuchten Systems und der Abbildung entsprechender charakteristischer Fehlermöglichkeiten ab. Da in dieser Arbeit ein Schwerpunkt auf die Untersuchung adaptronischer Struktursysteme mit applizierten piezokeramischen aktiven Elementen gesetzt wird, wird hier der Stand der Forschung bezüglich der mechanischen Modellierung dieser Strukturen zusammengefasst. Weiterhin werden einige Veröffentlichungen zur Optimierung solcher Systeme vorgestellt, da in diesem Kontext Verfahren zur Identifikation dominanter Parameter eingesetzt werden und dies somit ein mögliches Einsatzgebiet der in dieser Arbeit untersuchten neuen Verfahren der Sensitivitätsanalyse darstellt.

Grundlegende Arbeiten zur Modellierung piezoelektrischer Struktursysteme wurden anhand einfacher Balkenelemente mit applizierten Piezopatches durchgeführt. Verschie-

dene entwickelte Strategien werden in [1, 16] vorgestellt. Prinzipiell wird in diesen analytischen Verfahren der aktorische Einsatz über die Berechnung äquivalenter Kräfte und Momente, die entsprechend auf die Substruktur (Balken) wirken, berücksichtigt. Ein erster Ansatz, ausgehend von der Annahme einer gleichförmigen Dehnungsverteilung sowohl in der Substruktur als auch in der Piezokeramik, wurde in [6] vorgestellt, allerdings beschränkt sich die Anwendbarkeit dieses Verfahrens auf Balkenstrukturen mit mittig eingekapselten Aktoren. Das Pin-Force-Modell [23] geht dagegen von einer Dehnung mit gleichförmigem Verlauf im Piezomodul und einem linearen Verlauf in der Balkenstruktur aus. Dabei wird der Einfluss des Patchaktors auf die Biegesteifigkeit des Systems und die aufgebrachte zusätzliche Masse vernachlässigt. Eine Erweiterung mit der Annahme eines linearen Dehnungsverlaufs im Piezopatch wurde in [15] veröffentlicht. Ausgehend von der klassischen Laminattheorie wird im Bernoulli-Euler-Ansatz [22] der Steifigkeits- und Masseneinfluss der Aktoren berücksichtigt. Ein Vergleich verschiedener Ansätze bei unterschiedlichen Aktoranordnungen wird in [22] und [99] diskutiert. Wesentliches Ergebnis hierbei ist die Identifikation eines Bereiches, in dem die vereinfachenden Annahmen des Pin-Force-Ansatzes als zulässig angesehen werden können. Dabei wird das Dickenverhältnis zwischen Aktor und Substruktur betrachtet.

Die numerische Beschreibung piezoelektrischer Strukturelemente, ausgehend von den analytischen Modellierungsansätzen, mittels der Finite-Elemente-Methode wurde in der Vergangenheit ebenfalls intensiv erforscht. Entsprechende lineare Ansätze und geeignete Elementdefinitionen sind Bestandteil der meisten modernen kommerziellen FEM-Programme (z. B. in [2]). Dies ermöglicht zum einen die Modellierung adaptronischer Systeme mit komplexen und realen Strukturgeometrien, verhindert aber zum anderen die Berücksichtigung der verwendeten Regelungsstrategie. Die Möglichkeit der Integration entsprechender Algorithmen ist in keinem bekannten FEM-Softwarepaket vorgesehen.

Zur Lösung dieser Problematik wird in [45] ein Konzept zur Gesamtsimulation adaptronischer Systeme, ausgehend von numerischen Strukturmodellen und einer modalen Darstellung, beschrieben. Hier erfolgt die erforderliche Modellreduktion zur Herstellung der Kompatibilität über eine durchzuführende Auswahl der berücksichtigten Moden. Ein ähnlicher Ansatz mit der Implementierung eines leistungsfähigeren Modellreduktionsalgorithmus anhand von Krylov-Unterraummethoden [82] soll auch in dieser Arbeit umgesetzt werden.

Die Optimierung und gleichzeitig robuste Auslegung adaptronischer Strukturen ist Bestandteil vieler wissenschaftlicher Arbeiten. Eine Übersicht über aktuelle Veröffentlichungen wird in [30] gegeben. Hierbei werden als Variablen die Aktorpositionen, Parameter des zugrunde liegenden Regelalgorithmus und die Topologie der Struktur behandelt. Als Zielfunktionen werden statische Größen, beispielsweise die Minimierung mechanischer Auslenkungen oder Maximierung der Steuerbarkeit, betrachtet. Als Testsystem werden

zumeist einfache Strukturen bestehend aus Balken- und Plattenelementen untersucht.

Im Zusammenhang der Optimierung statischer Größen adaptronischer Struktursysteme werden gradientenbasierte lokale Verfahren der Sensitivitätsanalyse eingesetzt. Beispielsweise werden in [61, 62], ausgehend von einer allgemeinen Formulierung der Bewegungsgleichungen eines linearen dynamischen Systems, verschiedene Differentialquotienten als Sensitivitätsmaß analytisch hergeleitet. Es wird ein Optimalregler implementiert, wobei das Minimum eines Kostenfunktional zu bestimmen ist. Die Ableitungsterme dieses Funktional bezüglich diverser Systemgrößen werden als Sensitivitätsmaß für die Robustheit, Steuer- und Beobachtbarkeit des Systems verwendet. Als Anwendungsbeispiel wird eine adaptronische Tragwerksstruktur untersucht.

In [91, 106, 107] werden Ableitungen erster Ordnung mechanischer Größen basierend auf verschiedenen Ansätzen der Platten- und Laminattheorie hergeleitet und als Sensitivitätsmaß eingesetzt. Dabei werden Balken mit applizierten Piezopatchaktoren untersucht. Eine Implementierung zur direkten Berechnung der Ableitungsterme in einer numerischen FEM-Analyse wird in [74] dargestellt. Als Anwendungsbeispiel wird die Veränderung der statischen Auslenkung eines Piezobalkens bezüglich der Variation der piezoelektrischen Kopplungsparameter betrachtet. Ein weiterer Ansatz wird in [29] vorgestellt. Anhand der Verwendung eines statistischen Versuchsplans und von resultierenden Regressionsmodellen werden die Parameter eines Ultraschalllinearmotors bezüglich einer zu maximierenden Auslenkungsamplitude optimiert und die Effekte verschiedener Parameter berechnet.

Wesentlicher Kritikpunkt ist, dass dynamische Kenngrößen aufgrund komplexer Parameterabhängigkeiten nicht anhand derartiger Sensitivitätsanalysen adäquat erfasst werden können und dies zu entsprechenden Fehlinterpretationen führen kann. Gleichzeitig sind dynamische Größen in vielen Anwendungsfällen der Adaptronik, beispielsweise bei der aktiven frequenzabhängigen Reduktion von Störschwingungen, kennzeichnend für die Güte des Systems. Die Erarbeitung einer geeigneten Methodik mit neuen stochastischen Simulationsverfahren zur Bewertung dieser Struktursysteme bildet den wesentlichen Schwerpunkt der in dieser Dissertationsschrift dargestellten Untersuchungen.

3 Grundlagen

3.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik erläutert, die für das Verständnis dieser Arbeit notwendig sind. Eine umfassende anwendungsorientierte Darstellung wird beispielsweise in den Lehrbüchern von Papula [72] und Ross [81] gegeben.

Es werden prinzipiell Zufallsvariablen X_i und Funktionen von Zufallsvariablen $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ untersucht. Der zugehörige Kleinbuchstabe x_i bezeichnet dabei eine spezifische Realisation innerhalb des vorgegebenen Streubereichs der Variable X_i .¹ Die Streuung dieser stochastischen Größen wird über ihre zugehörige Dichtefunktion $p_i(X_i)$ oder $p_Y(f(X_1, X_2, \dots, X_k))$ charakterisiert. Dabei gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(X_i) \, dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(f(X_1, X_2, \dots, X_k)) \, dx_1 dx_2 \dots dx_k = 1 \quad . \quad (3.1)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden zumeist Funktionen von mehreren Zufallsvariablen $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ betrachtet. Dabei wird grundlegend angenommen, dass die Variablen X_1, X_2, \dots, X_k stochastisch unabhängig voneinander sind. Dies hat zur Folge, dass sich die gesamte Dichtefunktion mehrerer Zufallsvariablen aus der Multiplikation von Dichtefunktionen der einzelnen Zufallsgrößen zusammensetzt

$$p_Y(f(X_1, X_2, \dots, X_k)) = p_1(X_1) \cdot p_2(X_2) \cdot \dots \cdot p_k(X_k) \quad . \quad (3.2)$$

Die Verteilung einer Zufallsgröße wird durch die stochastischen Momente der zugehörigen Dichtefunktion charakterisiert. Das erste stochastische Moment gibt dabei die Lage der Verteilung an. Das zweite stochastische Moment bildet ein Maß für die Streuung der Variablen. Die Asymmetrie der Verteilung wird über das dritte Moment quantifiziert, soll aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden. Für die Definition der geläufigen Begriffe Erwartungswert und Varianz werden die stochastischen Momente in folgender Form verwendet.

¹Dies entspricht der in der Stochastik üblichen Notation. In einem allgemeinen Kontext wird der zugehörige Großbuchstabe verwendet.

Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot p_i(X_i) \, dx_i \quad (3.3)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, dx_1 dx_2 \dots dx_k \quad (3.4)$$

Dabei gelten für beliebige i, j und Konstanten c_1, c_2 die Beziehungen

$$\mathbb{E}(X_i + c_1) = \mathbb{E}(X_i) + c_1 \quad , \quad (3.5a)$$

$$\mathbb{E}(X_i + X_j) = \mathbb{E}(X_i) + \mathbb{E}(X_j) \quad . \quad (3.5b)$$

Varianz

$$\mathbb{V}\text{ar}[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}(X_i))^2 \cdot p_i(X_i) \, dx_i \quad (3.6)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathbb{E}(Y))^2 \cdot \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, dx_1 dx_2 \dots dx_k \quad (3.7)$$

Bei der Analyse mehrerer Zufallsvariablen lassen sich folgende Zusammenhänge anwenden

$$\mathbb{V}\text{ar}[X_i] = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \quad , \quad (3.8a)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[c_1 \cdot X_i + c_2] = c_1^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar}[X_i] \quad , \quad (3.8b)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[X_i + X_j] = \mathbb{V}\text{ar}[X_i] + \mathbb{V}\text{ar}[X_j] + 2 \cdot \mathbb{C}\text{ov}[X_i, X_j] \quad , \quad (3.8c)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[X_i \cdot X_j] &= (\mathbb{E}(X_i)^2 + \mathbb{V}\text{ar}[X_i]) \cdot (\mathbb{E}(X_j)^2 + \mathbb{V}\text{ar}[X_j]) \dots \\ &\quad - \mathbb{E}(X_i)^2 \cdot \mathbb{E}(X_j)^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.8d)$$

Die sogenannte Kovarianz zweier Variablen $\mathbb{C}\text{ov}[X_i, X_j]$ stellt dabei ein Maß für den linearen Zusammenhang dieser zwei stochastischen Größen dar

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\text{ov}[X_i, X_j] &= \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i)) \cdot (X_j - \mathbb{E}(X_j))) \\ &= \mathbb{E}(X_i \cdot X_j) - \mathbb{E}(X_i) \cdot \mathbb{E}(X_j) \quad . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Für den Fall der stochastischen Unabhängigkeit gilt

$$\mathbb{C}\text{ov}[X_i, X_j] = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Als Verteilungsfunktionen werden in dieser Arbeit die Gleich- und Normalverteilung verwendet. Diese sind durch die folgenden Dichtefunktionen definiert.

Gleichverteilung

$$p_{\mathcal{U}}(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.11)$$

Ist eine Variable X_i gleichverteilt, so wird dies über die Kennzeichnung $X_i \sim \mathcal{U}(a; b)$ definiert.

Normalverteilung

$$p_{\mathcal{N}}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.12)$$

Ein normalverteilter Parameter X_j wird mit $X_j \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ gekennzeichnet. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit gelten dabei ohne jegliche Einschränkungen auch für andere Verteilungsfunktionen.

3.2 Varianzbasierte globale Sensitivitätsanalyse

Eine simulationsbasierte globale Sensitivitätsanalyse² untersucht die Abhängigkeit der Ausgangsgrößen eines mathematischen Modells von seinen Eingangsparametern. Hierbei wird als Bewertungsmaß ein skalarer Wert berechnet, der diese Abhängigkeiten bezüglich des gesamten Definitions- und Wertebereichs der Eingangs- und Ausgangsgrößen quantifiziert. Diese skalaren Werte werden als globale Sensitivitätsmaße bezeichnet.

3.2.1 Sensitivitätsmaße

Varianzbasierte Sensitivitätsmaße und deren Berechnung wurden vor etwa 40 Jahren [24] in der wissenschaftlichen Literatur eingeführt. Die mathematische verallgemeinerte Beschreibung und Beweisführung wesentlicher Zusammenhänge wurde allerdings erst 20 Jahre später vom russischen Mathematiker Ilja M. Sobol' untersucht und veröffentlicht [95]. Diese sind grundlegend für das Verständnis der varianzbasierten Sensitivitätsmaße und werden im Folgenden zusammengefasst beschrieben.

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist eine quadratisch integrierbare Funktion $f(\mathbf{x})$, die die zu analysierende Systemgröße darstellt. Für die Darstellung der mathematischen Zusammenhänge wird der k -dimensionale Einheitsraum

$$\Omega^k = \{\mathbf{X} | 0 \leq x_i \leq 1; i = 1, \dots, k\} \quad , \text{ mit} \quad (3.13)$$

²In Anhang A wird der allgemeine Ablauf einer globalen Sensitivitätsanalyse beschrieben. Als Beispiel wird eine varianzbasierte Sensitivitätsanalyse der Ishigami-Testfunktion [51] durchgeführt.

k	Anzahl der Eingangsparameter,
$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]^T$	Vektor der Eingangsparameter X_i ,
x_i	Realisation des i -ten Eingangsparameters,

betrachtet. Die voneinander unabhängigen Eingangsparameter X_i sind im Wertebereich zwischen 0 und 1 gleichverteilt. Dies stellt keine mathematisch einschränkende Bedingung an die zu untersuchenden Modelle dar. Es wird lediglich die Darstellung der theoretischen Zusammenhänge vereinfacht, indem die Dichtefunktionen in den Integranden der folgenden mathematischen Gleichungen vernachlässigt werden können. Der betrachtete Einheitsraum Ω^k kann auf jede gewünschte Verteilungsfunktion mittels einfacher Transformationsbeziehungen abgebildet werden. Die berechneten Sensitivitätsmaße bezüglich des Einheitsraums sind identisch mit denjenigen im transformierten Raum. Zum besseren Verständnis werden die wichtigsten Zusammenhänge im Folgenden auch in verallgemeinerter Form dargestellt.

Die Funktion $f(\mathbf{x})$ wird in Form einer **H**igh **D**imensional **M**odel **R**epresentation (HDMR) in einzelne Summanden zerlegt

$$Y = f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{i=1}^k f_i(x_i) + \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{12\dots k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (3.14)$$

mit einer endlichen Anzahl 2^k an Termen, die Funktionen gleich indizierter Eingangsgrößen sind. Dabei bezeichnet man den konstanten Term f_0 als Funktion nullter Ordnung, die k Ausdrücke $f_i(x_i)$ als Funktionen erster Ordnung und die $\binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Terme als Funktionen k -ter Ordnung. Die Zerlegung einer Funktion nach Gl. (3.14) ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Sobol' [95] bewies allerdings, dass, wenn der Mittelwert jedes einzelnen Ausdrucks Null beträgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_i(x_i) dx_i &= 0 \quad , \quad \forall x_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, k \\ \int_0^1 \int_0^1 f_{ij}(x_i, x_j) dx_i dx_j &= 0 \quad , \quad \forall x_i, x_j \quad \text{mit } i < j \\ \dots \\ \int_{\Omega^k} \dots \int f_{12\dots k}(x_1, x_2, \dots, x_k) d\Omega^k &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.15)$$

alle Terme der HDMR (Gl. (3.14)) orthogonal (z. B. $\int_0^1 \int_0^1 f_i(x_i) f_j(x_j) dx_i dx_j = 0 \quad \forall i \neq j$)

zueinander sind und dass der konstante Term f_0 durch den Erwartungswert von $f(\mathbf{x})$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(f(\mathbf{x})) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \prod_{m=1}^k p_m(X_m) dx_1 \dots dx_k \quad (3.16a)$$

$$= \int_{\Omega^k} f(\mathbf{x}) d\Omega^k = f_0 \quad (3.16b)$$

gegeben ist. Die allgemeingültige Form mit den Dichtefunktionen $p(X_i)$ ist in Gl. (3.16a) angegeben. Analog dazu lassen sich damit auch alle anderen Terme höherer Ordnung eindeutig bestimmen. Dabei gibt der Term $d\{\Omega^k \setminus x_i\}$ eine Integration über den Raum an, der von den $k-1$ Parametern $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k$ aufgespannt wird. Im Folgenden sind die Ausdrücke für die benötigten bedingten Erwartungswerte und exemplarisch die Funktionen erster, zweiter und dritter Ordnung dargestellt³

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X_i) &= \int_{\{\Omega^k \setminus x_i\}} f(\mathbf{x}) d\{\Omega^k \setminus x_i\} = f_0 + f_i(x_i) \\ \Rightarrow \underline{f_i(x_i)} &= \mathbb{E}(Y|X_i) - f_0 = \underline{\mathbb{E}(Y|X_i) - \mathbb{E}(Y)} \quad , \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X_i, X_j) &= \int_{\{\Omega^k \setminus x_i, x_j\}} f(\mathbf{x}) d\{\Omega^k \setminus x_i, x_j\} = f_0 + f_i(x_i) + f_j(x_j) + f_{ij}(x_i, x_j) \\ \Rightarrow \underline{f_{ij}(x_i, x_j)} &= \mathbb{E}(Y|X_i, X_j) - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_0 \\ &= \underline{\mathbb{E}(Y|X_i, X_j) - \mathbb{E}(Y|X_i) - \mathbb{E}(Y|X_j) + \mathbb{E}(Y)} \quad , \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_m) &= \int_{\{\Omega^k \setminus x_i, x_j, x_m\}} f(\mathbf{x}) d\{\Omega^k \setminus x_i, x_j, x_m\} = f_0 + f_i(x_i) + f_j(x_j) \dots \\ &\quad + f_m(x_m) + f_{ij}(x_i, x_j) + f_{jm}(x_j, x_m) + f_{im}(x_i, x_m) + f_{ijm}(x_i, x_j, x_m) \\ \Rightarrow \underline{f_{ijm}(x_i, x_j, x_m)} &= \mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_m) - f_{ij}(x_i, x_j) - f_{jm}(x_j, x_m) \dots \\ &\quad - f_{im}(x_i, x_m) - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_m(x_m) - f_0 \\ &= \underline{\mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_m) - \mathbb{E}(Y|X_i, X_j) - \mathbb{E}(Y|X_j, X_m) - \mathbb{E}(Y|X_i, X_m) \dots} \\ &\quad + \underline{\mathbb{E}(Y|X_i) + \mathbb{E}(Y|X_j) + \mathbb{E}(Y|X_m) - \mathbb{E}(Y)} \quad . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dabei berechnen sich die bedingten Erwartungswerte im Falle der Unabhängigkeit der Eingangsparameter mit allgemeinen Dichtefunktionen $p(X_i)$ wie folgt

$$\mathbb{E}(Y|X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \cdot \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^k p_m(X_m) d\{\Omega^k \setminus x_i\} \quad , \quad (3.20a)$$

$$\mathbb{E}(Y|X_i, X_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \cdot \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i, m \neq j}}^k p_m(X_m) d\{\Omega^k \setminus x_i, x_j\} \quad , \quad \dots \quad (3.20b)$$

³Die Unterstreichungen dienen der Hervorhebung der Ergebnisse.

Aufgrund der Orthogonalität der Terme lässt sich somit nach Quadrierung und Integration der Ausdrücke die Varianz von $f(\mathbf{x})$ anhand von Gl. (3.14) wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[Y] &= \int \cdots \int_{\Omega^k} (f(\mathbf{x}) - f_0)^2 \cdot \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, d\Omega^k \\ &= \sum_{i=1}^k V_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k V_{ij} + \dots + V_{12\dots k} \quad , \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\text{mit } V_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i^2(x_i) \cdot p_i(X_i) \, dx_i \quad , \quad (3.22)$$

$$V_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}^2(x_i, x_j) \cdot p_i(X_i) \cdot p_j(X_j) \, dx_i dx_j \quad , \dots \quad (3.23)$$

Diese Form der Varianzzerlegung nach Gl. (3.21) wird als ANOVA-HDMR oder funktionale Varianzzerlegung bezeichnet. Da die Mittelwerte der einzelnen Ausdrücke f_i, f_{ij}, \dots per Definition den Wert Null annehmen, gilt außerdem

$$\mathbb{V}\text{ar}[f_i(x_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f_i(x_i) - \underbrace{\mathbb{E}(f_i(x_i))}_{=0})^2 \cdot p_i(X_i) \, dx_i = V_i \quad , \quad (3.24a)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[f_{ij}(x_{ij})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_{ij}(x_{ij}) - \underbrace{\mathbb{E}(f_{ij}(x_{ij}))}_{=0})^2 \cdot p_i(X_i) \cdot p_j(X_j) \, dx_i dx_j = V_{ij} \quad , \quad (3.24b)$$

...

Vergleicht man diese Zusammenhänge mit den Gln. (3.17), (3.18) und (3.19), folgt wiederum

$$\underline{V_i} = \underline{\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i)]} - \underbrace{\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y)]}_{=0} \quad , \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} \underline{V_{ij}} &= \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i, X_j)] - \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i)] - \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_j)] + \underbrace{\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y)]}_{=0} \\ &= \underline{\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i, X_j)]} - V_i - V_j \quad , \end{aligned} \quad (3.25b)$$

$$\begin{aligned} \underline{V_{ijm}} &= \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_m)] - \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i, X_j)] - \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_j, X_m)] \dots \\ &\quad - \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i, X_m)] + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i)] + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_j)] \dots \\ &\quad + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_m)] - \underbrace{\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y)]}_{=0} \\ &= \underline{\mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_m)]} - V_{ij} - V_{jm} - V_{im} - V_i - V_j - V_m \quad , \end{aligned} \quad (3.25c)$$

...

Anschaulich lässt sich beschreiben, weshalb der Ausdruck $V_i = \text{Var} [\mathbb{E} (Y|X_i)]$ ein adäquates globales Sensitivitätsmaß für die Einflussnahme des Parameters X_i darstellt. Unter der Annahme, dass X_i die einzige relevante Einflussgröße eines Systems darstellt, wird die Streuung des Systemverhaltens maßgeblich durch die Veränderung der Einstellung dieses Parameters verursacht. Dies bedeutet, dass die Varianz des zu erwartenden Systemverhaltens bei unterschiedlichen vorgegebenen Werten des Parameters X_i der Gesamtvarianz des untersuchten Modells entspricht. In einem solchen Fall gilt $\text{Var} [\mathbb{E} (Y|X_i)] \approx \text{Var} [Y]$.

Die Zerlegung der Varianz nach Gl. (3.21) ermöglicht dabei auch die Berücksichtigung von Wechselwirkungseffekten. Diese werden durch die Terme V_{ij}, V_{ijm}, \dots höherer Ordnung wiedergegeben. Anhand Gl. (3.25) erkennt man, dass sie sich aus der Varianz der entsprechenden bedingten Erwartungswerte abzüglich aller Sensitivitätsterme niedrigerer Ordnung zusammensetzen.

Wird Gl. (3.21) durch Division mit der linken Seite normiert, erhält man eine Form, aus der sich die varianzbasierten 2^{k-1} Sensitivitätsterme S_i, S_{ij}, \dots ableiten

$$1 = \sum_{i=1}^k S_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k S_{ij} + \dots + S_{12\dots k} \quad (3.26)$$

In einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse werden in den meisten Fällen die sogenannten Haupt- und Totaleffekte (S_H, S_T) berechnet. Dabei stellt der Haupteffekt ein Maß für den direkten Einfluss eines Parameters auf die Ausgangsvarianz dar. Der Totaleffekt berücksichtigt zusätzliche Wechselwirkungseffekte, die bei nichtlinearen Systemen maßgeblich sein können. Der Totaleffekt S_{T_i} berechnet sich aus der Summe aller Sensitivitätsterme in Gl. (3.26) mit Index i .

$$\text{Haupteffekt:} \quad S_{H_i} = S_i = \frac{\text{Var} [\mathbb{E} (Y|X_i)]}{\text{Var} [Y]} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Totaleffekt:} \quad S_{T_i} &= S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k S_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq l}}^k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, l \neq j}}^k S_{ijl} + \dots + S_{12\dots k} \\ &= 1 - \frac{\text{Var} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var} [Y]} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Indizes beliebig gewählt werden kann, z. B. gilt $S_{ijl} = S_{jli}$. Die Darstellung in Bayesscher Notation der Effekte Gln. (3.27) und (3.28) lässt sich anschaulich über das Gesetz der totalen Varianz

$$\text{Var} [Y] = \text{Var} [\mathbb{E} (Y|X_i)] + \mathbb{E} (\text{Var} [Y|X_i]) \quad (3.29a)$$

$$= \text{Var} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})] + \mathbb{E} (\text{Var} [Y|\mathbf{X}_{-i}]) \quad (3.29b)$$

herleiten. Dabei bezeichnet $\mathbf{X}_{-i} = \{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k\}$ die Menge aller Eingangsgrößen unter Ausschluss des i -ten Parameters. Falls der Ausdruck $\mathbb{E}(\text{Var}[Y|X_i])$, der die erwartete Varianz von Y bei gegebener Einstellung des Parameters X_i darstellt, klein ist, so kennzeichnet dies einen großen Einfluss des Parameters X_i auf die Varianz der Ausgangsgröße Y . Dementsprechend sagt ein großer Wert des Ausdrucks $\text{Var}[\mathbb{E}(Y|X_i)]$ dasselbe aus.

Wird Gl. (3.29a) durch $\text{Var}[Y]$ dividiert, so erkennt man, dass die gesamte Varianz des Modells von X_i direkt verursacht wird, wenn der Term

$$\frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|X_i)]}{\text{Var}[Y]} = S_i = 1 \quad (3.30)$$

beträgt. Gleichung (3.29b) stellt sich in normierter Form wie folgt dar

$$1 = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var}[Y]} + \frac{\mathbb{E}(\text{Var}[Y|\mathbf{X}_{-i}])}{\text{Var}[Y]} \quad (3.31)$$

Eine analoge Interpretation lautet, dass der Parameter X_i einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Varianz der Ausgangsgröße hat, wenn die Ausdrücke

$$1 - S_{T_i} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var}[Y]} \approx 1 \quad \text{und} \quad S_{T_i} = \frac{\mathbb{E}(\text{Var}[Y|\mathbf{X}_{-i}])}{\text{Var}[Y]} \approx 0 \quad (3.32)$$

betragen. Dabei werden alle Sensitivitätsterme S_i, S_{ij}, \dots , zu denen der i -te Parameter einen Beitrag leistet, berücksichtigt. Der Totaleffekt wird demzufolge aus der Umkehrung von Gl. (3.32) hergeleitet. Der Parameter X_i übt einen dominanten Einfluss unter Berücksichtigung aller zugehörigen Wechselwirkungseffekte auf die Varianz der Ausgangsgröße Y aus, wenn

$$1 - \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var}[Y]} \approx 1 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\mathbb{E}(\text{Var}[Y|\mathbf{X}_{-i}])}{\text{Var}[Y]} \approx 0 \quad \text{gilt.} \quad (3.33)$$

Aus den beschriebenen mathematischen Zusammenhängen lassen sich einige Eigenschaften des untersuchten Modells und der Sensitivitätsmaße ableiten. Diese werden auch zur Beurteilung der Konvergenz der implementierten Berechnungsmethoden verwendet. Im Allgemeinen gilt:

$$\sum_{i=1}^k S_{H_i} \leq 1 \quad (3.34a)$$

$$\sum_{i=1}^k S_{H_i} = 1 \quad \Rightarrow \text{Modell ist additiv.} \quad (3.34b)$$

$$1 - \sum_{i=1}^k S_{H_i} >> 0 \quad \Rightarrow \text{Es existieren Wechselwirkungseffekte.} \quad (3.34c)$$

$$S_{T_i} \approx S_{H_i} \quad \Rightarrow \text{Es existieren keine Wechselwirkungseffekte.} \quad (3.34d)$$

$$\sum_{i=1}^k S_{T_i} \geq 1 \quad (3.34e)$$

Die Berechnung der Haupt- und Totaleffekte (Gln. (3.27), (3.28)) über die Lösung der Integralterme in Gl. (3.20) ist in der Regel mit einem hohen Rechenaufwand verbunden, da eine analytische oder numerische Bestimmung im Allgemeinen nicht möglich ist und auf stochastische Simulationsstrategien zur statistischen Abschätzung oder spektralen Approximation zurückgegriffen werden muss. Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Verfahren werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

3.2.2 Berechnungsmethoden

Eine Übersicht über verschiedene Verfahren zur Berechnung der varianzbasierten Sensitivitätsmaße wird in [85] gegeben. Gleichzeitig werden diese anhand verschiedener Testmodelle miteinander verglichen. Die Auswahl der in dieser Arbeit implementierten Algorithmen folgt den entsprechenden Empfehlungen und Ergebnissen. Zur softwaretechnischen Umsetzung wurde MATLAB verwendet. Wenn nicht anders angegeben, wurden alle Algorithmen eigenständig programmiert. Die Validierung erfolgte dabei anhand verschiedener Testfunktionen und den aus der Literatur bekannten Ergebnissen.

Die benötigte Rechenzeit zur Erstellung der Stichproben und Berechnung der Sensitivitätsmaße ist in der Regel klein gegenüber dem Rechenaufwand, der mit der Durchführung der Simulationen des untersuchten Modells einhergeht. Die Rechenkosten der im Folgenden beschriebenen Algorithmen werden daher mit der Anzahl benötigter Simulationsdurchläufe angegeben. Dabei wird der Ausdruck $\mathcal{O}(N)$ verwendet, der einen ganzzahligen Wert der Größenordnung N bezeichnet.

Monte-Carlo-Simulation

Eine statistische Schätzung der Integrale in Gl. (3.20) kann mit der Durchführung von direkten Monte-Carlo-Simulationen erfolgen. Hierbei wird anhand der stochastischen Charakterisierung der Eingangsgrößen über die zugehörigen Dichtefunktionen im ersten Schritt eine Stichprobe erstellt. Diese Stichprobe, auch Sample genannt, besteht aus einer Vielzahl an Wertekombinationen der Eingangsvariablen, die dem untersuchten Modell im Folgeschritt zur Berechnung übergeben werden. Die zugehörigen Simulationsdurchläufe werden als Zufallsexperiment bezeichnet. Zur Generierung der Stichproben existieren prinzipiell drei grundlegend verschiedene Ansätze, die im Anhang C (S. 129 ff.) näher erläutert werden.

Es wurden in der Vergangenheit einige Monte-Carlo-basierte Strategien zur Bestimmung varianzbasierter Sensitivitätsmaße vorgestellt und diskutiert. In dieser Arbeit werden dabei die nach dem aktuellen Stand der Forschung effizientesten Verfahren implementiert. Die zugehörigen Algorithmen werden in den Veröffentlichungen der Wissenschaftler Sobol' [95, 96], Jansen [52] und Saltelli [84, 85] beschrieben.

Gleichung (3.25a) wird zur Berechnung der Sensitivitätsmaße erster Ordnung (Haupteffekte) umgeformt:

$$\begin{aligned}
 V_i &= \text{Var} [\mathbb{E}(Y|X_i)] \stackrel{\text{Gl. (3.22)}}{=} \int_0^1 f_i^2(x_i) dx_i \stackrel{\text{Gl. (3.17)}}{=} \int_0^1 (\mathbb{E}(Y|X_i) - \mathbb{E}(Y))^2 dx_i \\
 &\stackrel{\text{Gln. (3.16b), (3.20a)}}{=} \int_0^1 \mathbb{E}(Y|X_i)^2 dx_i - 2 \cdot f_0 \cdot \underbrace{\int_0^1 \mathbb{E}(Y|X_i) dx_i}_{=f_0} + f_0^2 \\
 &= \int_0^1 \mathbb{E}(Y|X_i)^2 dx_i - f_0^2 \stackrel{\text{Gl. (3.16b)}}{=} \int_0^1 \mathbb{E}(Y|X_i)^2 dx_i - \mathbb{E}(Y)^2 \quad . \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Gleichzeitig werden zwei voneinander unabhängige Wertekombinationen

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k) \quad (3.36)$$

der Eingangsparameter \mathbf{X} betrachtet. Mit diesen zwei unabhängigen Realisationen von \mathbf{X} wird eine dritte generiert. Dabei wird einer der beiden Vektoren \mathbf{x} oder $\tilde{\mathbf{x}}$ zugrunde gelegt. Lediglich der i -te Eintrag wird mit dem entsprechenden Wert des anderen Vektors ersetzt. Damit lässt sich der Integrand in Gl. (3.35) anhand Gl. (3.20a) wie folgt darstellen

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y|X_i)^2 &= \mathbb{E}(Y|X_i) \cdot \mathbb{E}(Y|X_i) \\
 &= \int \cdots \int_{\{\Omega^k \setminus x_i, \tilde{\Omega}^k \setminus \tilde{x}_i\}} f(\mathbf{x}) \cdot f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, x_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_k) d\{\Omega^k \setminus x_i, \tilde{\Omega}^k \setminus \tilde{x}_i\} \\
 &= \int \cdots \int_{\{\Omega^k \setminus x_i, \tilde{\Omega}^k \setminus \tilde{x}_i\}} f(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_k) d\{\Omega^k \setminus x_i, \tilde{\Omega}^k \setminus \tilde{x}_i\} \quad . \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Der k -dimensionale Integralterm in Gl. (3.35) wird somit umgewandelt in ein Integral mit der Dimension $(2 \cdot k - 1)$ [51]

$$\int_0^1 \mathbb{E}(Y|X_i)^2 dx_i = \int \cdots \int_{\{\Omega^k, \tilde{\Omega}^k \setminus \tilde{x}_i\}} f(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_k) d\{\Omega^k, \tilde{\Omega}^k \setminus \tilde{x}_i\} \quad . \quad (3.38)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (3.35) f_0^2 berechnet sich anhand der zwei unabhängigen Realisationen \mathbf{x} , $\tilde{\mathbf{x}}$ zu

$$f_0^2 = \int_{\Omega^k} \cdots \int f(\mathbf{x}) d\Omega^k \cdot \int_{\tilde{\Omega}^k} \cdots \int f(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\Omega}^k \quad . \quad (3.39)$$

Zusammenfassend ergibt sich für den Sensitivitätsausdruck erster Ordnung V_i der Ausdruck

$$\begin{aligned} V_i &= \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (Y|X_i)] \\ &= \int \cdots \int_{\{\Omega^k, \tilde{\Omega}^k\}} f(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot [f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(\mathbf{x})] \, d\{\Omega^k, \tilde{\Omega}^k\} \quad (3.40) \end{aligned}$$

Anhand der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich eine geeignete statistische Schätzfunktion ableiten

$$V_i \hat{=} \hat{V}_i = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f(\tilde{\mathbf{x}}_r) \cdot [f(x_{r,1}, \dots, x_{r,i-1}, \tilde{x}_{r,i}, x_{r,i+1}, \dots, x_{r,k}) - f(\mathbf{x}_r)] \quad (3.41a)$$

$$= \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f_{\mathbf{B},r} \cdot [f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} - f_{\mathbf{A},r}] \quad (3.41b)$$

mit $f_{\mathbf{A},r} = f(\mathbf{x}_r)$, $f_{\mathbf{B},r} = f(\tilde{\mathbf{x}}_r)$, $f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} = f(x_{r,1}, \dots, x_{r,i-1}, \tilde{x}_{r,i}, x_{r,i+1}, \dots, x_{r,k})$ und der Stichprobengröße N .

Analog hierzu lässt sich zur Berechnung des Totaleffekts (Gl. (3.28)) der Ausdruck $\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})]$ über das Integral

$$\begin{aligned} &\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})] \\ &= \int \cdots \int_{\{\Omega^k, \tilde{\Omega}^k\}} f(\mathbf{x}) \cdot [f(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(\tilde{\mathbf{x}})] \, d\{\Omega^k, \tilde{\Omega}^k\} \quad (3.42) \end{aligned}$$

darstellen. Eine entsprechende statistische Schätzung erfolgt mit⁴

$$\begin{aligned} &\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})] \\ &\hat{=} \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f(\mathbf{x}_r) \cdot [f(x_{r,1}, \dots, x_{r,i-1}, \tilde{x}_{r,i}, x_{r,i+1}, \dots, x_{r,k}) - f(\tilde{\mathbf{x}}_r)] \quad (3.43a) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f_{\mathbf{A},r} \cdot [f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} - f_{\mathbf{B},r}] \quad (3.43b)$$

Dieser Berechnungsansatz für den Totaleffekt wurde von Sobol' [95] vorgestellt und wird zur Differenzierung von anderen Verfahren im Folgenden als Sobol'-Schätzer bezeichnet.

Eine alternative Vorgehensweise wurde von Jansen [52] veröffentlicht. Hierbei wird zur Bestimmung von $\mathbb{E} (\mathbb{V}\text{ar} [Y|\mathbf{X}_{-i}])$ (Gl. (3.32)) die Schätzfunktion

$$\mathbb{E} (\mathbb{V}\text{ar} [Y|\mathbf{X}_{-i}]) \hat{=} \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^N (f(\mathbf{x}_r) - f(x_{r,1}, \dots, x_{r,i-1}, \tilde{x}_{r,i}, x_{r,i+1}, \dots, x_{r,k}))^2 \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^N (f_{\mathbf{A},r} - f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r})^2 \quad (3.45)$$

⁴Das Symbol $\hat{=}$ hat hier die Bedeutung „*wird abgeschätzt mit*“.

verwendet. Dieser Schätzer leitet sich anschaulich aus folgender Überlegung her. Die Varianz der bedingten Ausgangsgröße ($Y|\mathbf{X}_{-i}$) bemisst die quadratische Veränderung der Ausgangsgröße Y , wenn von allen Eingangsgrößen \mathbf{X} lediglich der i -te Parameter verändert wird. Mit den Stichprobenmatrizen \mathbf{A} und $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)}$ und den entsprechenden Ausgangsgrößen $f_{\mathbf{A}}$ und $f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)}}$ stehen dafür N Stichprobenpaare zur Verfügung. Pro Stichprobenrealisation \mathbf{x}_r werden dabei zwei Stufen des Parameters X_i berücksichtigt. Daher wird eine entsprechende Division durch Zwei vorgenommen.

In der Berechnung der Sensitivitätsmaße geht neben den besprochenen Integraltermen weiterhin die Varianz der Ausgangsgröße mit ein. Sie wird mit der bekannten korrigierten Stichprobenvarianz statistisch approximiert. Mit der verwendeten Notation ergibt sich

$$\text{Var}[Y] \hat{=} \frac{1}{2N-1} \cdot \sum_{r=1}^{2N} \left(f_{\mathbf{AB},r} - \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{2N} f_{\mathbf{AB},r} \right)^2 \quad \text{mit } f_{\mathbf{AB}} = [f(\mathbf{x}), f(\tilde{\mathbf{x}})]^T \quad (3.46)$$

Die statistische Berechnung der Haupt- und Totaleffekte (Gln. (3.27), (3.28)) mit der Durchführung direkter Monte-Carlo-Simulationen erfolgt somit über die Schätzfunktionen

$$\begin{aligned} S_{H_i} &= \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|X_i)]}{\text{Var}[Y]} \hat{=} \\ \hat{S}_{H_i} &= \frac{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f_{\mathbf{B},r} \cdot [f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} - f_{\mathbf{A},r}]}{\frac{1}{2N-1} \cdot \sum_{r=1}^{2N} \left(f_{\mathbf{AB},r} - \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{2N} f_{\mathbf{AB},r} \right)^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} S_{T_i} &= 1 - \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var}[Y]} \\ &\hat{=}_1 \hat{S}_{T_i, \text{Sobol}} = 1 - \frac{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f_{\mathbf{A},r} \cdot [f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} - f_{\mathbf{B},r}]}{\frac{1}{2N-1} \cdot \sum_{r=1}^{2N} \left(f_{\mathbf{AB},r} - \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{2N} f_{\mathbf{AB},r} \right)^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbb{E}(\text{Var}[Y|\mathbf{X}_{-i}])}{\text{Var}[Y]} \\ &\hat{=}_2 \hat{S}_{T_i, \text{Jansen}} = \frac{\frac{1}{2N} \sum_{r=1}^N \left(f_{\mathbf{A},r} - f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} \right)^2}{\frac{1}{2N-1} \cdot \sum_{r=1}^{2N} \left(f_{\mathbf{AB},r} - \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{2N} f_{\mathbf{AB},r} \right)^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Der wesentliche Vorteil dieser statistischen Schätzer besteht darin, dass die Berechnungen anhand einer Stichprobe und der zugehörigen Simulationsergebnisse durchgeführt werden können. Eine effiziente Strategie zur Generierung eines entsprechenden Samples wird in [85] beschrieben. Die Vorgehensweise basiert auf einer zufallsbasierten Definition zweier Matrizen $\mathbf{A}_{N \times k}$, $\mathbf{B}_{N \times k}$ mit jeweils N Zeilen und k Spalten. Die Einträge sind im Einheitsraum (Gl. (3.13)) definiert und gleichverteilt. Jede Zeile der Matrizen repräsentiert somit eine Wertekombination der Parameter \mathbf{X} . Die in der Matrix \mathbf{A} hinterlegten

Parameterwerte werden zur Berechnung der Größen $f(\mathbf{x}_r)$ dem Simulationsmodell vorgegeben. Dabei ist eine dem Streuverhalten der modellspezifischen Parameter entsprechende Transformation vorzunehmen. Die Transformationsbeziehung einer Eingangsgröße ist durch die Inverse der zugehörigen Verteilungsfunktion gegeben. Analog dazu berechnet sich $f(\tilde{\mathbf{x}}_r)$ aus den Werten der Matrix \mathbf{B} .

Zur Bestimmung von $f(x_{r,1}, \dots, x_{r,i-1}, \tilde{x}_{r,i}, x_{r,i+1}, \dots, x_{r,k})$ wird eine neue Stichprobenmatrix $\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)}$ gebildet. Die zugehörigen Einträge werden aus der Matrix \mathbf{A} übernommen. Lediglich die i -te Spalte wird durch die entsprechende Spalte der Matrix \mathbf{B} ersetzt. Dies erfolgt für jeden der k Parameter. Die dabei insgesamt entstehenden $k \cdot N$ Wertekombinationen der k Matrizen werden ebenfalls dem Simulationsmodell als Eingangsgrößen zur Berechnung übergeben. Insgesamt ergibt sich zur Ermittlung von $f_{\mathbf{A}}$, $f_{\mathbf{B}}$ und $f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)}}$ ein Rechenaufwand der Größenordnung $\mathcal{O}(N \cdot (k + 2))$.

Die Einträge der Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} werden über einen Zufallszahlengenerator bestimmt. Es wird eine Zufallszahlenmatrix mit N Zeilen und $2 \cdot k$ Spalten generiert. Aus den ersten k Spalten wird die Matrix \mathbf{A} gebildet. Entsprechend besteht Matrix \mathbf{B} aus den verbleibenden Spalten. Hier können verschiedene Ansätze basierend auf Pseudo-, Quasizufallszahlen oder Latin-Hypercube-Sampling-Methoden eingesetzt werden (s. Anhang C, S. 129). Die resultierende Recheneffizienz, die durch die stochastische Konvergenz der berechneten statistischen Maße gekennzeichnet wird, hängt dabei wesentlich von der gewählten Strategie zur Auswahl der Zufallszahlen ab. Gleichzeitig ist die Güte eines Zufallszahlengenerators abhängig von den untersuchten statistischen Maßen und den zugrunde liegenden Simulationsmodellen, sodass hier keine allgemeingültige Aussage getroffen werden kann.

Im Falle der Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße mit Monte-Carlo-Simulationen wird in der Literatur die Verwendung von Sobol'-Sequenzen [94], einem Generator für Quasizufallszahlen, empfohlen. Dabei gilt zu beachten, dass eine Quasizufallszahlensequenz aus deterministischen Zahlenfolgen besteht, die den k -dimensionalen Einheitsraum optimal ausfüllen. Eine zufallsbasierte Auswahl der Elemente einer Sequenz führt somit zu einer Verminderung der Recheneffizienz. Die Reihenfolge der Zahlenfolgen ist entsprechend beizubehalten.

Ein Vergleich mit anderen Zufallszahlengeneratoren zur Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße ist nicht bekannt. Zwar wird in dieser Arbeit kein Schwerpunkt auf eine Gegenüberstellung verschiedener Methoden zur Stichprobengenerierung gelegt, dennoch wird für das erste vorgestellte Beispielsystem (s. Kapitel 5) zur Erstellung der Stichproben sowohl ein Pseudo- als auch ein Quasizufallszahlengenerator und als dritte Möglichkeit eine Variante des Latin-Hypercube-Samplings implementiert. Dies dient der quantitativen Erfassung des Fehlers, der aus einer suboptimalen Stichprobenauswahl resultieren kann.

Extended-FAST-Analyse

Der **Extended-Fourier-Analysis-Sensitivity-Test** (ExFAST) bildet eine alternative Möglichkeit zur Berechnung der Haupt- und Totaleffekte und basiert auf einer spektralen Analyse. Der Algorithmus wurde von Saltelli [83] vorgestellt. Wesentliche Vorarbeiten wurden allerdings schon in den 1970er Jahren veröffentlicht [24, 25, 26, 88]. In der Literatur finden sich wenige Vergleiche zwischen der ExFAST- und der Monte-Carlo-basierten Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße. Eine eindeutige Bewertung der Recheneffizienz wurde noch nicht untersucht und gestaltet sich aufgrund der Abhängigkeit vom untersuchten Simulationsmodell und dessen streuenden Eingangsparametern als schwierig. In der vorliegenden Arbeit wird der ExFAST-Algorithmus als Alternative zu den statistischen Methoden implementiert.

Die elementare Idee der ExFAST-Methodik liegt darin, dass jedem einzelnen Eingangsparameter X_i eine bestimmte ganzzahlige Frequenz ω_i zugeordnet wird. Die Erstellung der Stichprobe erfolgt über eine zu definierende periodische Funktion. Die Sensitivitätsmaße werden aus einer abschließenden spektralen Auswertung über eine Fourieranalyse abgeleitet. Die wesentlichen Schritte werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

Es wird wieder vom Einheitshyperraum Ω^k (Gl. (3.13)) als Definitionsbereich der Eingangsgrößen ausgegangen. Als harmonische Funktion zur Erstellung der Stichprobe wird in [83]

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\sin(\omega_i s + \varphi_i)) \quad \text{mit den Termen} \quad (3.50)$$

ω_i	charakteristische Frequenz des i -ten Parameters,
s	skalare Laufvariable (mit $-\infty < s < +\infty$),
φ_i	zufällig ausgewählte Phasenverschiebung,

vorgeschlagen.

Die Vorgehensweise der ExFAST-Analyse basiert auf einem von Weyl im Jahre 1938 aufgestellten Theorem [103]

$$\bar{y}^{(r)} = \int \cdots \int_{\Omega^k} f(\mathbf{x})^r d\Omega^k \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underbrace{f^r(x_1(s), x_2(s), \dots, x_k(s))}_{=f^r(s)} ds \quad . \quad (3.51)$$

Es besagt, dass das r -te Moment $\bar{y}^{(r)}$ einer Funktion (linke Seite) von periodischen Variablen \mathbf{x} mit voneinander unabhängigen Frequenzen durch ein eindimensionales Integral mit der Laufvariable s (rechte Seite) ausgedrückt werden kann. Entsprechend lassen sich

statistische Kenngrößen wie die Varianz in der Form der linken Seite von Gl. (3.51) darstellen. Eine (eindimensionale) Fourieranalyse ermöglicht wiederum eine Darstellung in der Form der rechten Seite. Somit können anhand spektraler Analysen über eine Fouriertransformation statistische Maße einer Funktion berechnet werden.

Im Allgemeinen gilt dieser Zusammenhang jedoch nur für unabhängige Frequenzen, was technisch durch die physikalisch begrenzte Präzision von Computern nicht realisierbar ist. Durch eine geschickte Auswahl der Frequenzen wird dennoch eine hohe Approximationsgüte der statistischen Maße erreicht. Dabei sollen nach Cukier [24] positive ganze Zahlen gewählt werden, da hieraus eine Periode von $2T = 2\pi$ resultiert. Die rechte Seite von Gl. (3.51) stellt sich nun wie folgt dar

$$\bar{y}^{(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^r(s) ds \quad . \quad (3.52)$$

Wird eine Fourier-Reihenentwicklung von $f(s)$

$$f(s) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (A_j \cos js + B_j \sin js) \quad (3.53)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$A_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos js \, ds, \quad B_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin js \, ds \quad (3.54)$$

über den Bereich ganzzahliger Frequenzen $j \in \mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty\}$ vorgenommen, so berechnet sich das zugehörige Spektrum zu $\Lambda_j = A_j^2 + B_j^2$. Da $f(s)$ eine realwertige Funktion darstellt, ist das Spektrum symmetrisch. Das Parsevalsche Theorem sagt aus, dass die Gesamtsumme des Spektrums dem zweiten Moment der untersuchten Funktion entspricht

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Lambda_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(s) \, ds = \bar{y}^{(2)} \quad . \quad (3.55)$$

Daraus lässt sich wiederum folgern, dass die anteilige Varianz D_i , die aus der Streuung des Faktors X_i resultiert, aus der Summe der Amplituden im Spektrum mit der Fundamentalfrequenz ω_i und den zugehörigen höheren Harmonischen $p \cdot \omega_i$ approximiert werden kann

$$D_i \hat{=} \hat{D}_i = \sum_{p \in \mathbb{Z}^0} \Lambda_{p \cdot \omega_i} = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \Lambda_{p \cdot \omega_i} \quad \text{mit} \quad \mathbb{Z}^0 = \{\mathbb{Z} \setminus 0\} \quad . \quad (3.56)$$

In [86] zeigte Saltelli, dass dieser Term dem Ausdruck $\text{Var} [\mathbb{E} (Y|X_i)]$ (Gl. (3.25a)) entspricht. Analog berechnet sich die gesamte Varianz der Ausgangsgröße zu

$$\text{Var} [Y] \hat{=} \hat{D} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^0} \Lambda_j = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Lambda_j \quad . \quad (3.57)$$

Das Verhältnis $\frac{\hat{D}_i}{\hat{D}}$ entspricht dem Haupteffekt (Gl. (3.27)). Der Totaleffekt (Gl. (3.28)) lässt sich ebenfalls berechnen, indem der Ausdruck $\text{Var} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})]$ mit

$$\text{Var} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})] \hat{=} \hat{D}_{-i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \Lambda_{p \cdot \omega_j} \quad (3.58)$$

approximiert wird. In der technischen Umsetzung wird eine begrenzte Anzahl M an Vielfachen der Fundamentalfrequenz ω_i berücksichtigt. In der Literatur wird in der Regel eine maximale Ordnung von $M = 4$ betrachtet, da in vielen Fällen die Annahme einer schnellen Amplitudendegression im Spektrum gerechtfertigt ist.

Die Haupt- und Totaleffekte (Gln. (3.27), (3.28)) werden nach dem ExFAST-Algorithmus wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} S_{H_i} &= \frac{\text{Var} [\mathbb{E} (Y|x_i)]}{\text{Var} [Y]} \\ &\hat{=} \hat{S}_{H_i, \text{ExFAST}} = \frac{2 \sum_{p=1}^M \Lambda_{p \cdot \omega_i}}{2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Lambda_j} \quad , \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} S_{T_i} &= 1 - \frac{\text{Var} [\mathbb{E} (Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var} [Y]} = \frac{\mathbb{E} (\text{Var} [Y|\mathbf{X}_{-i}])}{\text{Var} [Y]} \\ &\hat{=} \hat{S}_{T_i, \text{ExFAST}} = 1 - \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k 2 \sum_{p=1}^M \Lambda_{p \cdot \omega_j}}{2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Lambda_j} \quad . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Größe der zu berechnenden Stichprobe einer ExFAST-Analyse hängt somit von der Diskretisierung des Laufparameters s , der Anzahl an Parametern k und Wiederholungen N_r , der maximalen Ordnung M und Frequenz ω_{\max} ab. Es ergibt sich ein Rechenaufwand von $\mathcal{O}(kN_r(2M\omega_{\max} + 1))$. Der Ausdruck $2M\omega_{\max} + 1$ leitet sich dabei aus der Vorgabe des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems ab.

In der softwaretechnischen Umsetzung wird hierbei dem untersuchten Parameter X_i die maximale Frequenz $\omega_i = \omega_{\max}$ zugeordnet. Den verbleibenden Einflussgrößen \mathbf{X}_{-i} werden niedrige Frequenzen ω_{-i} zugeteilt. Diese sind, wenn möglich, voneinander unterschiedlich zu wählen, sodass der Parameterraum durch die periodischen Funktionen (Gl. 3.50) möglichst füllend abgetastet wird. Zur optimalen spektralen Auflösung ist aber gleichzeitig die Differenz zwischen ω_i und ω_{-i} zu maximieren. Weiterhin dient eine hohe Anzahl an Wiederholungen N_r einer Verbesserung der stochastischen Konvergenz. Dies

wird erreicht, indem in der Wiederholung eine andere zufällig ausgewählte Phasenverschiebung φ_i der periodischen Funktion (Gl. (3.50)) zugeordnet wird. Die Stichprobe wird somit von einem anderen Startpunkt im Parameterraum aus erstellt und der Wertebereich wird besser abgedeckt.

Der in dieser Arbeit implementierte Berechnungsalgorithmus zur Stichprobenerstellung setzt lediglich die Vorgabe der erlaubten gesamten Anzahl an Simulationen voraus. Daraus wird automatisiert eine möglichst hohe Anzahl an Wiederholungen N_r und eine möglichst große Maximalfrequenz ω_{\max} bei möglichst unterschiedlichen aber dennoch kleinen Frequenzen ω_{-i} ermittelt. Es wird dabei ein in der Literatur empfohlenes Verhältnis von $\omega_i/N_r = 16 \dots 64$ gewählt.

Zusätzlich wurden eigene neue Ansätze zur optimalen Ausnutzung der Frequenzspannweite und eine zufallsbasierte Zuordnung der Frequenzen ω_{-i} implementiert. Somit sollte zum einen die spektrale Auflösung verbessert und zum anderen die Ausfüllung des Wertebereichs der Parameter optimiert werden. Eine wesentliche Verbesserung der stochastischen Konvergenz konnte bei der Untersuchung von verschiedenen aus der Literatur bekannten Testsystemen allerdings nicht festgestellt werden. Daher werden diese Ansätze hier nicht näher erläutert.

Random-Balanced-Design

Ein weiteres spektrales Verfahren, welches allerdings auf die Berechnung der Haupteffekte beschränkt ist, wird **Random-Balanced-Design** (RBD) genannt und wurde erstmals von Tarantola [100] beschrieben. Der Algorithmus baut auf einer spektralen Analyse analog der ExFAST-Methode auf. Die RBD-Methodik wird in der Literatur als ein sehr recheneffizientes Verfahren zur Berechnung von Haupteffekten beschrieben [85]. Eine Implementierung in der Softwareumgebung MATLAB wird von Tarantola zur Verfügung gestellt.⁵

Der grundlegende Unterschied zur Vorgehensweise einer ExFAST-Analyse besteht in der Stichprobenerstellung. Als erster Schritt wird eine Stichprobe der Laufvariable s mit $s \in \{-\pi; \pi\}$ der Größe N erstellt. Danach werden k zufällige Permutationen s_1, \dots, s_k erzeugt. Mit dieser Permutationsmatrix und der periodischen Gleichung (Gl. (3.50)) wird eine Stichprobenmatrix der Dimension $N \times k$ der Eingangsparameter \mathbf{X} erstellt. Dabei wird allen Größen die gleiche Frequenz $\omega_i = 1$ zugeordnet. Diese Werterealisationen werden weiterhin dem Simulationsmodell zur Berechnung übergeben. Im Folgeschritt wird die Reihenfolge der Simulationsergebnisse y zur Berechnung des Haupteffekts des Parameters X_i so umgestellt (y_{s_i}), dass s_i nach aufsteigenden Werten angeordnet ist. Besteht eine starke Abhängigkeit des Modellverhaltens vom Parameter X_i , wirkt sich

⁵Webseite (Stand 24.01.2011) <http://sensitivity-analysis.jrc.it/software>

diese unmittelbar auf y_{s_i} aus. Abschließend wird, analog zum ExFAST-Algorithmus, eine Fourier-Analyse zur spektralen Bestimmung der bedingten Varianzen durchgeführt. Der benötigte Rechenaufwand ist vergleichsweise gering und beziffert sich auf $\mathcal{O}(N)$.

3.3 Konfidenzintervalle mit Bootstrap-Resampling

Eine statistische Analyse kann nur dann als aussagekräftig angesehen werden, wenn gleichzeitig Aussagen über die stochastischen Fehler getroffen werden. Dies kann über die Angabe des Stichprobenfehlers oder von Konfidenzintervallen erfolgen. Zur Berechnung kann beispielsweise das Verfahren des Bootstrap-Resamplings verwendet werden.

Bootstrapping ist eine vielfältig anwendbare Technik basierend auf der wiederholten Berechnung (Resampling) von statistischen Maßen. Sie wurde erstmals von Efron [28] formuliert. Allerdings etablierte und verbreitete sich diese Methodik erst in den 1990er Jahren [17]. Seitdem wurden eine Vielzahl an Anwendungen innerhalb verschiedener wissenschaftlicher Disziplinen untersucht. In sehr vielen Fällen stellte sich heraus, dass Bootstrapping anderen vergleichbaren Techniken überlegen ist. Im Kontext varianzbasierter Sensitivitätsanalysen erfolgt die Berechnung von Vertrauensbereichen in den zugehörigen Publikationen ausschließlich über diese Resamplingmethoden. Daher werden auch in den hier vorgestellten Untersuchungen entsprechende Verfahren implementiert.

Die Vorgehensweise wird im Folgenden anschaulich beschrieben. Ausgangspunkt stellt eine Stichprobe der Größe N und die darauf basierende statistische Schätzung $\hat{\Theta}$ eines skalaren Maßes dar. Im Bootstrap-Resampling-Kontext wird diese Stichprobe nun als Grundgesamtheit aufgefasst. Ein Resample b bildet sich, indem aus der vorhandenen Stichprobe N -mal per Zufallszahlengenerator ein Element gezogen und wieder zurück gelegt wird. Anhand dieses Resamples lässt sich die Bootstrap-Schätzung $\hat{\Theta}_b$ berechnen. Dies lässt sich beliebig oft wiederholen. Ein Beispiel wird in Anhang D (S. 133) gegeben.

Ist der Stichprobenumfang N hinreichend groß und die Anzahl an Resamples B hoch, so lassen sich mit den Bootstrap-Schätzungen $\hat{\Theta}_b$, dem zugehörigen arithmetischen Mittelwert und der Standardabweichung

$$\hat{\Theta}_B^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\Theta}_b, \quad \sigma_{\hat{\Theta}_B} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B \left((\hat{\Theta}_b)^2 - (\hat{\Theta}_B^*)^2 \right)} \quad (3.61)$$

der Erwartungswert und der Standardfehler des Schätzers $\hat{\Theta}$ berechnen, da beide Maßzahlen stochastisch konvergieren

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \hat{\Theta}_B^* = \mathbb{E}(\hat{\Theta}), \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \sigma_{\hat{\Theta}_B} = \sqrt{\mathbb{E}(\hat{\Theta}^2) - \mathbb{E}(\hat{\Theta})^2}. \quad (3.62)$$

Weiterhin lässt sich beispielsweise mit den 97,5 % und 2,5 %-Perzentilen der Verteilung der Bootstrap-Schätzungen $\hat{\Theta}_b$ ein 95 %-Konfidenzintervall für die Schätzung $\hat{\Theta}$ angeben. Hierbei handelt es sich um den einfachsten Ansatz, Vertrauensbereiche anhand von Bootstrap-Resamples anzugeben. Es existieren für Sonderfälle (Asymmetrie der Bootstrap-Verteilung) fortgeschrittene Methoden [17], die allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

3.4 Rastersuche nach Morris

In einigen Fällen, beispielsweise bei der Analyse großer numerischer Modelle, wird die Implementierung einer Sensitivitätsanalyse basierend auf direkten Monte-Carlo-Simulationen durch den hohen Rechenaufwand verhindert. Dieser kann aufgrund der Abhängigkeit der Anzahl durchzuführender Simulationen von der Anzahl an Parametern reduziert werden, wenn im Vorfeld der quantitativen Sensitivitätsanalyse eine Rastersuche implementiert wird. Eine Rastersuche, auch Screening-Analyse genannt, hat prinzipiell das Ziel, unwichtige oder wichtige Parameter qualitativ zu identifizieren. In einer darauf folgenden quantitativen Untersuchung reicht es somit aus, lediglich die eindeutig als qualitativ relevant eingestuften Variablen zu berücksichtigen. Der Parameterraum, definiert durch die den Eingangsvariablen zur stochastischen Charakterisierung zugeordneten Dichtefunktionen, wird in ein Gitter unterteilt (Bild 3.1), und vereinzelte Gitterpunkte werden zur Berechnung dem Simulationsmodell übergeben.

Verfügbare Verfahren unterscheiden sich in der Art und Weise der Rasterung, Auswahl der Parameterkombinationen und Auswertung der Simulationsergebnisse. In dieser Arbeit wird eine Screening-Technik implementiert, die erstmals von Morris [70] veröffentlicht wurde. Eine wesentliche Weiterentwicklung der Methode wurde von Campolongo [14] erarbeitet. Neben den genannten Publikationen ist eine detaillierte Zusammenfassung dieser Methode in [87] gegeben.

Das Morris-Screening basiert auf der Berechnung von **E**lementary **E**ffects⁶ EE_i

$$EE_i = \frac{Y(X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_i + \Delta, \dots, X_k) - Y(X_1, X_2, \dots, X_k)}{\Delta} \quad (3.63)$$

mit der Ausgangsgröße Y und den k Eingangsparametern X_i . Die Schrittweite $\Delta \in \{\frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-1}, \dots, 1 - \frac{1}{p-1}\}$ ist vorzugeben. Dabei stellt p die Anzahl an berücksichtigten Stufen dar. Die Wahl von p definiert das Gitter möglicher Punkte im Parameterraum Ω^k , indem den Stufen entsprechende Quantile der Verteilungsfunktionen der Variablen X_i zugeordnet werden.

⁶Im weiteren Verlauf der Arbeit wird neben dem englischen Begriff die deutsche wortgetreue Übersetzung *Elementareffekt* verwendet.

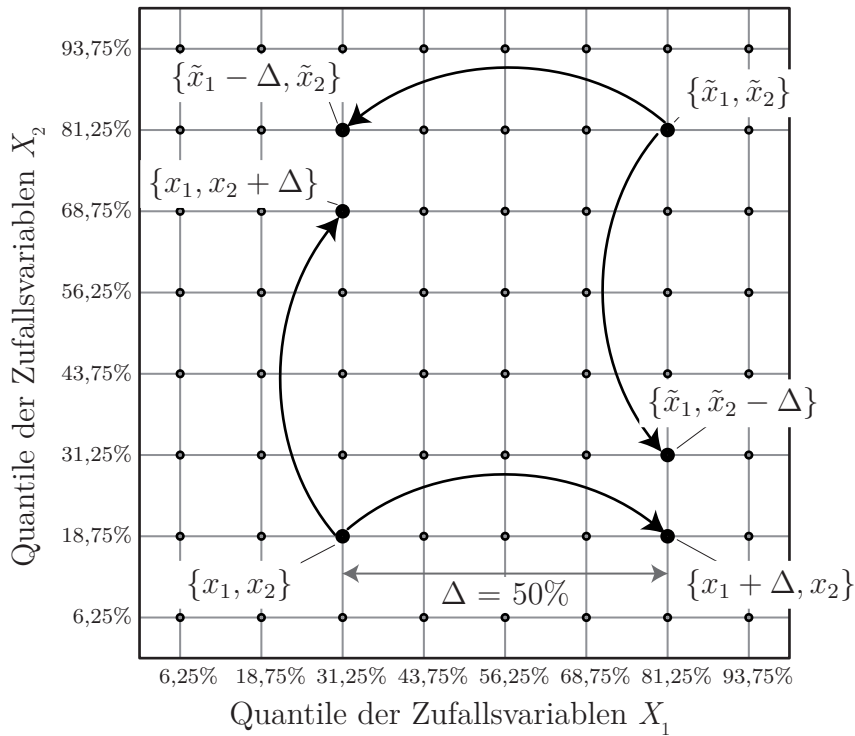


Bild 3.1: Gitter für einen Morris-Screening-Test

In Bild 3.1 ist für $p = 8$, $\Delta = 4/7$ (entspricht bezüglich der ausgewählten Quantile einer Differenz von 50 %) und zwei gleichförmig verteilte Parameter X_1, X_2 ein Gitter möglicher Punkte für ein Morris-Screening dargestellt. Exemplarisch sind für zwei Punkte $\{x_1, x_2\}$, $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ alle möglichen Schrittrichtungen abgebildet. Die Wahl der Stufen p und der Schrittweite Δ hängt von der Anzahl der Parameter und den verfügbaren Simulationsdurchläufen ab. Anhand der sechs gekennzeichneten Rasterpunkte lassen sich demnach für die Variablen X_1, X_2 jeweils zwei Elementareffekte berechnen.

Als Bewertungsmaße werden der Mittelwert, der Mittelwert der Absolutbeträge und die Varianz (oder Standardabweichung) der Elementareffekte betrachtet. Diese werden mit den bekannten statistischen Schätzfunktionen approximiert

$$\mu_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r EE_{i,j} \quad , \quad (3.64a)$$

$$\mu_i^* = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |EE_{i,j}| \quad , \quad (3.64b)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^r (EE_{i,j} - \mu_i)^2 \quad . \quad (3.64c)$$

Der Mittelwert μ_i beziffert die erwartete Veränderung der Ausgangsgröße Y bei Variation des Parameters X_i und ist somit von der qualitativen Aussage vergleichbar mit dem Haupteffekt S_H . Die Standardabweichung σ_i stellt, ähnlich dem Totaleffekt S_T , ein Maß

für die Auswirkung von Kopplungseffekten dar. Ist σ_i klein, so ist die Veränderung der Ausgangsgröße unabhängig von den Werten der anderen Variablen, die konstant gehalten werden.

Die Verwendung von μ_i^* wurde von Campolongo [14] eingeführt und stellt eine Verbesserung zur Vermeidung von Typ-II-Fehlern (Einstufung relevanter Parameter als irrelevant) dar. Diese treten auf, wenn Elementareffekte sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Verhält sich die untersuchte Ausgangsgröße nichtmonoton und nicht-linear, so kann dieser Sachverhalt gegeben sein.

Die Erstellung der Stichprobe basiert auf der Definition von treppenförmigen Trajektorien im k -dimensionalen Parameterraum Ω^k . Ausgehend von einem zufällig ausgewählten Rasterpunkt wird basierend auf den verfügbaren Schrittrichtungen der nächste Simulationspunkt zufällig ausgewählt. Dies wird k -mal durchgeführt, sodass für jeden Eingangsparameter X_i ein Elementareffekt berechnet werden kann. Zur Bestimmung von r Effektwerten werden demnach r Trajektorien innerhalb des Raums Ω^k gebildet. Der zugehörige Rechenaufwand ist dabei von der Größenordnung $\mathcal{O}(r \cdot (k + 1))$.

In [14] wird weiterhin ein Verfahren zur optimalen Ausfüllung des Parameterraums vorgestellt. Es wird in einem ersten Schritt eine hohe Anzahl M an Trajektorien definiert. Als zweites wird für jedes Trajektorienpaar (m, l) der Abstand d_{ml} berechnet

$$d_{ml} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \sqrt{\sum_{z=1}^k [X_{z,i}(m) - X_{z,j}(l)]^2}, & \text{für } m \neq l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.65)$$

Aus den M Trajektorien werden alle $\binom{M}{r}$ Möglichkeiten der Kombination von r Pfaden betrachtet. Für jede Trajektorie wird als Bewertungsmaß die Summe der Abstandsquadrate zu allen anderen Pfaden innerhalb einer betrachteten Auswahl gebildet. Werden die Abstandsmaße aller Trajektorien einer Zusammenstellung summiert, so erhält man einen Bewertungsindex der Spannweite, d. h. ein Maß dafür wie gut der Parameterraum durch die betrachtete Kombination von r Pfaden ausgefüllt wird. Entsprechend wird aus den $\binom{M}{r}$ Möglichkeiten die Konstellation mit der größten Spannweite ausgewählt.

Da die Untersuchung aller $\binom{M}{r}$ Möglichkeiten für große M sehr rechenintensiv ist, wurde innerhalb dieser Arbeit die Methodik vereinfacht. Anstatt $\binom{M}{r}$ wurde eine festzulegende Anzahl R an zufällig ausgewählten Kombinationsmöglichkeiten von r Pfaden betrachtet. Innerhalb dieser R -Zusammenstellung wurde das Optimum, wie oben beschrieben, identifiziert und der Rastersuche nach Morris zugrunde gelegt.

3.5 Neuronale Netzwerke

Der Einsatz neuronaler Netzwerke hat sich in vielen Anwendungen zur Analyse und Optimierung komplexer Zusammenhänge bewährt. In dieser Arbeit sollen einfache stati-

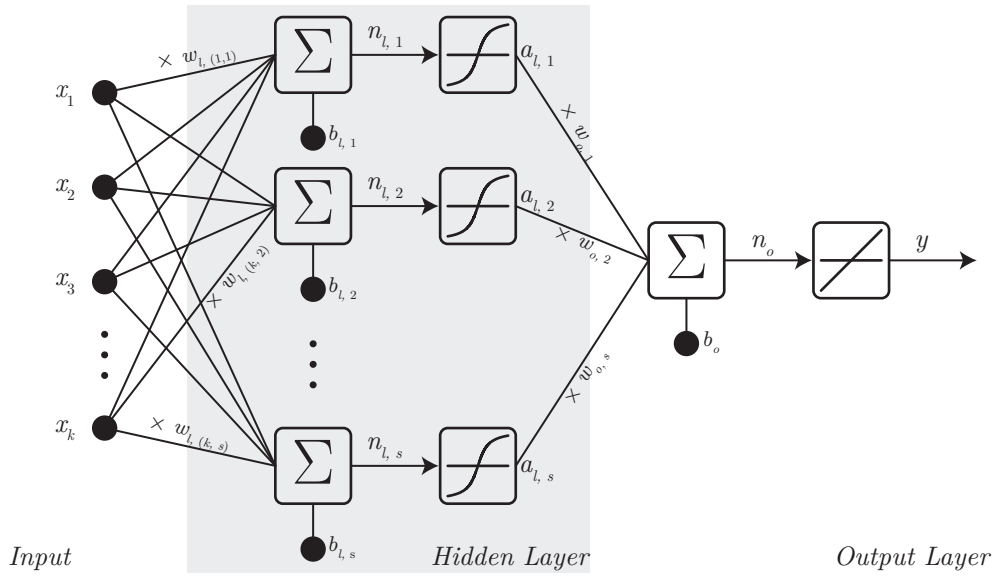


Bild 3.2: Aufbau eines Feed-Forward neuronalen Netzes mit einem versteckten Layer

sche neuronale Feed-Forward⁷-Netzwerke zur Metamodellierung rechenintensiver Strukturmodelle implementiert und bewertet werden. Diese Möglichkeit der Bildung eines Regressionsmodells ist beispielsweise auch in der weit verbreiteten kommerziellen Software LS-OPT [98] gegeben. In der folgenden Beschreibung der notwendigen Grundlagen wird sich auf die in dieser Arbeit verwendeten einfachen Netzwerke beschränkt. Die verwendeten Algorithmen sind aus [27] entnommen.

In Bild 3.2 ist beispielhaft der Aufbau eines neuronalen Netzwerkes, wie es in dieser Arbeit implementiert wurde, skizziert. Es handelt sich um ein Feed-Forward-Netz mit den Eingangsgrößen (*Input*), einer verdeckten Schicht (*Hidden Layer*) mit s Neuronen und einer Ausgabebene (*Output Layer*) mit einem Neuron. Sollen mehrere Ausgangsgrößen betrachtet werden, ist eine entsprechende Anzahl an zusätzlichen Neuronen in der Ausgabebene zu implementieren. Alternativ dazu kann für jede einzelne Ausgangsgröße ein separates Netz erstellt werden.

Die Eingangsvariablen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_k]$ werden mit einer Gewichtungsmatrix \mathbf{w}_l multipliziert und den einzelnen Neuronen zugeführt. Die Neuroneneingabe $n_{l,i}$ berechnet sich dabei jeweils zu

$$n_{l,i} = b_{l,i} + \sum_{j=1}^k x_j \cdot w_{l,(j,i)} \quad , \text{ mit einem Bias } b_{l,i} \quad . \quad (3.66)$$

Dieser Wert wird einer Aktivierungsfunktion (auch Transferfunktion genannt) zugeführt. In der verdeckten Schicht werden tangentielle sigmoidale Funktionen implementiert. Die Eingangsgröße n_o für das Ausgabeneuron berechnet sich wiederum aus der Summe der

⁷Der Datenfluss verläuft ausschließlich von links nach rechts.

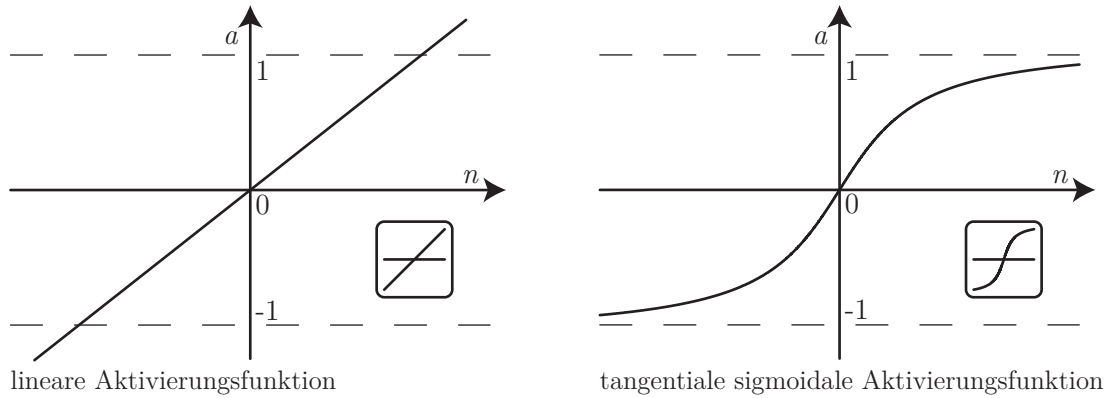


Bild 3.3: Lineare und tangentielle sigmoidale Transferfunktionen

Aktivierungszustände $a_{l,i}$ multipliziert mit Gewichtungsfaktoren $w_{o,i}$ und einem Bias b_o zu $n_o = b_o + \sum_{i=1}^s a_{l,i} \cdot w_{o,i}$. Der Wert n_o wird der Transferfunktion des Ausgangsneurons zugeführt. Hier wird eine lineare Transferfunktion verwendet. Der Verlauf der implementierten Aktivierungsfunktionen ist in Bild 3.3 dargestellt. Die zugehörigen mathematischen Zusammenhänge lauten

$$a_{l,i} = f_l(n_{l,i}) = \text{tansig}(n_{l,i}) = \frac{2}{1 + e^{-2 \cdot n_{l,i}}} - 1 \quad , \quad y = f_o(n_o) = \text{purelin}(n_o) = n_o \quad . \quad (3.67)$$

Die Bezeichnungen wurden dabei aus [27] übernommen. Das Trainieren des Netzwerkes entspricht der Minimierung des quadratischen Fehlers (Methode der kleinsten Quadrate) anhand vorgegebener Datensätze, indem die optimalen Einstellungen für \mathbf{w}_l , \mathbf{w}_o und \mathbf{b}_l , b_o gesucht werden. Als Standardverfahren für Feed-Forward-Netze in [27] ist der Levenberg-Marquardt-Algorithmus [57, 64] implementiert.

Als variable Parameter zur Identifizierung geeigneter Netzwerke sollen in dieser Arbeit lediglich die Größe der Trainingsdatensätze und die Anzahl an Neuronen in der verdeckten Schicht betrachtet werden. Das hier verfolgte Ziel der Implementierung neuronaler Netzwerke ist es, anhand einer möglichst geringen Anzahl an Simulationen des Originalmodells ein adäquates Metamodell zu identifizieren. Somit sind die Datensätze zum Trainieren der Netzwerke möglichst klein zu wählen. Gleichzeitig kann die Approximationsgüte durch die Anzahl implementierter Neuronen beeinflusst werden.

4 Bewertung der statistischen Schätzfehler

Die Berechnung und Bewertung von Schätzfehlern spielt in der realen Anwendung eine zentrale Rolle, wird aber in vielen Fällen vernachlässigt. Der Einsatz rechenintensiver Algorithmen zur Approximation statistischer Größen ohne Bewertung der asymptotischen Erwartungstreue und stochastischen Konvergenz kann zu falschen Ergebnissen und Fehlinterpretationen führen. Dennoch bleibt auch in der Fachliteratur dieser Aspekt der Anwendung varianzbasierter Sensitivitätsanalysen weitestgehend unbeachtet.

Weiterhin wurde in eigenen vorhergehenden Forschungsarbeiten [36, 37, 39] die vielversprechende Implementierung dieser Verfahren dargestellt. Ein wesentliches Defizit bestand allerdings in der Existenz von eindeutigen Schätzfehlern. Zu diesem Zeitpunkt waren jedoch noch keine Möglichkeiten der Abschätzung und Bewertung dieser Fehler implementiert. Daher liegt ein Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Entwicklung einer Methodik, diese Fehler qualitativ und quantitativ zu beschreiben.

In den folgenden Abschnitten werden herkömmliche Vorgehensweisen, basierend auf dem Vergleich unterschiedlicher Algorithmen und auf der Bestimmung von Konfidenzintervallen mit Bootstrap-Resampling-Techniken, vorgestellt und diskutiert. Weiterhin werden neue Ansätze zur Bewertung der stochastischen Konvergenz sowie zur quantitativen Berechnung der Schätzfehler beschrieben.

4.1 Vergleich unterschiedlicher Berechnungsmethoden

Die einfachste Möglichkeit, die bei der statistischen Berechnung der Haupt- und Totaleffekte entstehenden Fehler zu bewerten, liegt im direkten Vergleich unterschiedlicher Schätzmethoden. Zur Berechnung der Sensitivitätsmaße wurden zwei grundlegend unterschiedliche Berechnungsverfahren, die Verwendung von Monte-Carlo-Simulationen und die spektrale ExFAST-Methode, vorgestellt. Die entsprechenden Schätzfunktionen sind durch die Gleichungen (3.47) bis (3.49) sowie (3.59) und (3.60) gegeben. Beiden Verfahren liegt die Annahme der Konsistenz und asymptotischen Erwartungstreue zugrunde. Das heißt, es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}_{H_i, \text{MC}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}_{H_i, \text{ExFAST}} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|x_i)]}{\text{Var}[Y]} \quad , \quad (4.1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{S}_{T_i, \text{MC}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{S}_{T_i, \text{ExFAST}} = 1 - \frac{\text{Var}[\mathbb{E}(Y|\mathbf{X}_{-i})]}{\text{Var}[Y]} \quad (4.2)$$

Der Fehler lässt sich aus der Differenz der Schätzer $\varepsilon_i = \widehat{S}_{H_i/T_i, \text{MC}} - \widehat{S}_{H_i/T_i, \text{ExFAST}}$ ableiten, da diese gegen den Wert Null ($\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$) strebt. Ein skalares Fehlermaß ist beispielsweise durch folgende Gleichung gegeben

$$\varepsilon_{H/T} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\widehat{S}_{H_i/T_i, \text{Jansen/Sobol'}} - \widehat{S}_{H_i/T_i, \text{ExFAST}} \right)^2 \quad (4.3)$$

Ein gravierender Nachteil dieser Art der Fehlerabschätzung liegt in dem um ein Vielfaches erhöhten Rechenaufwand. Weiterhin wird nicht geklärt, ob die Wahl der Stichprobengröße N lediglich für ein oder für beide Schätzverfahren unzureichend gewählt wurde. Somit entstehen zusätzliche möglicherweise vermeidbare Rechenkosten. Ein derartiges Verfahren kann lediglich bei einfach zu berechnenden Simulationsmodellen eingesetzt werden. Es besteht weiterhin theoretisch die Möglichkeit, dass trotz eines Fehlerwertes von Null ($\varepsilon_{H/T} \approx 0$) der wahre Effektwert schlecht angenähert wird. Dieser Fall träte ein, wenn für alle k Parameter die unterschiedlichen Verfahren ähnliche fehlerbehaftete Schätzwerte der Effekte liefern. Es wird allerdings angenommen, dass dieser Fall aufgrund sehr niedriger Auftretenswahrscheinlichkeit vernachlässigt werden kann.

In der Literatur werden in einigen Veröffentlichungen [83, 85] derartige vergleichende Untersuchungen vorgenommen. Allerdings liegt hierbei der Fokus auf der Bewertung der einzelnen Verfahren und nicht auf der Approximation des Schätzfehlers. Aufgrund der genannten Nachteile wird diese Form der Fehlerbewertung nicht weiter untersucht.

4.2 Konfidenzintervalle und Standardfehler

Die Angabe von Vertrauensbereichen bildet das einzige in der Literatur der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse verwendete Verfahren zur expliziten Betrachtung von Schätzfehlern. Diese Konfidenzintervalle lassen sich lediglich für die statistischen Schätzfunktionen (Gln. (3.47) bis (3.49)) ohne zusätzlichen Simulationsaufwand berechnen. Für die spektralen Algorithmen ist für eine vergleichbare Analyse eine Vielzahl an Wiederholungen notwendig, was auch für einfache Modelle zu einem nicht akzeptablen Rechenaufwand führt. Dies stellt einen entscheidenden Nachteil der ExFAST- und RBD-Methoden dar.

Zur Berechnung der Konfidenzintervalle und der Standardfehler statistischer Verfahren wurde in Abschnitt 3.3 das Verfahren des Bootstrap-Resamplings vorgestellt. Grundlegende Annahme hierbei ist, dass die verwendeten erneut zusammen gestellten Stichproben (Resamples) normalverteilt sind. Verwendet man bei der Erstellung der Stichprobe einen Pseudozufallszahlengenerator (Anhang C), so ist diese Annahme berechtigt, da

hier eine einzelne Wertekombination (entsprechend einer einzelnen Zeile in der Stichprobenmatrix) per Definition unabhängig von allen anderen Zeileneinträgen ist. Für das Latin-Hypercube-Sampling gilt dies nur bedingt, da diese Form der absoluten Unabhängigkeit zwischen den einzelnen Einträgen nicht mehr vorherrscht.

Werden Quasizufallszahlen, die aus deterministischen Zahlensequenzen bestehen, eingesetzt, so sind die Einträge der Stichprobenmatrix direkt abhängig voneinander. In [3] wird beschrieben, dass für eine sehr große Anzahl an Resamples ($B \rightarrow \infty$) die Bootstrap-Schätzungen für den Standardfehler erwartungstreu sind. Berechnungen, die im Vorfeld dieser Arbeit durchgeführt wurden, zeigen jedoch, dass im Falle von Quasizufallszahlen eine langsamere stochastische Konvergenz auftreten kann. Dies drückt sich auch durch eine erhöhte Diskrepanz der Resamples aus. Somit ist zu erwarten, dass die Genauigkeit der mit Bootstrapping berechneten Vertrauensbereiche bei Verwendung von Pseudozufallszahlen tendenziell größer und bei Quasizufallszahlen geringer ist.

Ein weiterer Kritikpunkt bezüglich der alleinigen Betrachtung von Vertrauensbereichen besteht in der Möglichkeit sich überschneidender Intervalle. Dies kann bei kleinen Stichproben mit großen Konfidenzintervallen oder bei mehreren Variablen mit Sensitivitätsmaßen der gleichen Größenordnung vorkommen. Eine derartige Überschneidung der Vertrauensbereiche verringert die Aussagefähigkeit einer Sensitivitätsanalyse.

Im weiteren Verlauf wird trotz der genannten Nachteile die aus der Literatur bekannte Vorgehensweise zur Berechnung der Vertrauensbereiche mit Bootstrap-Resamples übernommen. Zusätzlich wird eine erweiterte Analyse der Schätzfehler mit neu entwickelten Ansätzen implementiert, die in den folgenden Abschnitten erläutert werden.

4.3 Bewertung der stochastischen Konvergenz

Das Konvergieren der ermittelten Sensitivitätsmaße gegen einen konstanten Wert bei der zur Verfügung stehenden Stichprobengröße ist eine wesentliche Voraussetzung zur Beurteilung des Schätzfehlers. Im Allgemeinen ist bei Monte-Carlo-Analysen die gewählte Stichprobengröße groß genug zu wählen, sodass die Schwankung der Schätzungen bei einer weiteren Vergrößerung der Stichprobe gering ausfällt.

Eine analytische Berechnung der gesuchten Sensitivitätsindizes ist in der Regel nicht möglich, daher kann trotz Konvergenz keine exakte Fehlerbestimmung erfolgen. Umso wichtiger ist es, die Schwankungen der Schätzwerte basierend auf der vorhandenen Stichprobe zu untersuchen.

Zur Vermeidung zusätzlicher Simulationsdurchläufe ist dabei zu beachten, dass aus der gewählten Stichprobengröße und den zugehörigen ermittelten Antwortgrößen die Schätzwerte kleinerer Stichproben generiert werden können. Dies ist prinzipiell sowohl mit

Pseudo- als auch mit Quasizufallszahlen möglich. Latin-Hypercube-Sampling-Verfahren sind im Gegensatz dazu lediglich eingeschränkt einsetzbar (Anhang C).

Zur Bewertung der stochastischen Konvergenz wird im Rahmen dieser Arbeit die folgende Vorgehensweise implementiert.

1. Aus der vorhandenen Stichprobe der Größe N werden m Subsamples der Größe N_i mit $i = 1, 2, \dots, m$ generiert, wobei gilt $N_1 < N_2 < \dots < N_m < N_{m+1} = N$.
2. Für alle diese m Stichproben und alle Parameter werden die Sensitivitätsmaße $S_{H_{k,m}}, S_{T_{k,m}}$ berechnet.
3. Der Konvergenzfehler wird für alle k Eingangsparameter wie folgt ermittelt

$$\varepsilon_{H_{k,i}} = \sup \left| S_{H_{k,i}} - \sup_j |S_{H_{k,i}} - S_{H_{k,j}}| \right|, \quad (4.4a)$$

$$\varepsilon_{T_{k,i}} = \sup \left| S_{T_{k,i}} - \sup_j |S_{T_{k,i}} - S_{T_{k,j}}| \right|, \quad (4.4b)$$

mit $i = 1, 2, \dots, m$ und $j \in \{i - 5, i - 4, \dots, i - 1, i + 1, i + 2, \dots, m + 1\}$.

Für jedes Sensitivitätsmaß $S_{H_{k,i}}$ und $S_{T_{k,i}}$ wird der maximale Differenzbetrag zu den ermittelten Werten bei allen größeren und den vier nächstkleineren Stichproben berechnet. Dabei wird der absolute Fehler berücksichtigt, sodass ein für alle k Parameter vergleichbares quantitatives Maß zur Verfügung steht. Es ist offensichtlich, dass ein derartiges Fehlermaß gegen Null strebt, wenn die bei größer werdenden Stichproben ermittelten Sensitivitätsmaße gegen einen konstanten Wert konvergieren.

4. Ein skalares Bewertungsmaß zur Beurteilung einer statistischen Analyse kann mit der Mittelung über alle k Parameter erfolgen

$$\varepsilon_{H_i} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varepsilon_{H_{j,i}}, \quad \varepsilon_{T_i} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varepsilon_{T_{j,i}}. \quad (4.5)$$

5. Legt man einen Grenzwert ε_{max} fest, der je nach Bedarf zu wählen ist, kann die Stichprobengröße N_p ermittelt werden, ab der dieser maximale Fehler unterschritten wird

$$\varepsilon_{H_q} < \varepsilon_{max}, \quad \varepsilon_{T_q} < \varepsilon_{max} \quad (4.6)$$

mit $q = p, p + 1, \dots, m$. Wenn keine Stichprobe existiert, deren zugehöriges Fehlermaß den Grenzwert unterschreitet, so ist die vorgegebene Stichprobengröße N für die Zielsetzung der Analyse mit dem erlaubten maximalen Fehler ε_{max} nicht geeignet. Liegt p nahe bei m , so kann eine Empfehlung für eine größere Stichprobe ausgesprochen werden.

Die Ergebnisse der Implementierung dieser Art der Bewertung der stochastischen Konvergenz wird in den folgenden Kapiteln beschrieben. Es zeigt sich, dass hiermit in Ergänzung zu den Vertrauensbereichen ein geeignetes Verfahren zur Bewertung der Approximationsgüte gegeben ist.

4.4 Funktionale stochastische Verschiebung

Grundsätzlich besteht die Problematik, dass die exakten Werte der varianzbasierten Sensitivitätsmaße im Allgemeinen unbekannt sind und analytisch nicht berechnet werden können. Somit beruht eine Fehleranalyse zum einen auf einer Analyse der stochastischen Konvergenz, wobei unbekannt bleibt, ob die Anforderung der asymptotischen Erwartungstreue erfüllt wird, und zum anderen auf der Angabe eines Vertrauensbereichs. Ist dieser jedoch groß, so wird es bei vielen Parametern zu Überschneidungen der Konfidenzintervalle kommen und eine eindeutige Aussage über die Reihenfolge der Wichtigkeit von Eingangsgrößen kann nicht getroffen werden.

Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neuer Ansatz zur Bewertung des Approximationsfehlers entwickelt, wobei das Prinzip als „funktionale stochastische Verschiebung“ bezeichnet wird. Die grundlegende Idee ist dabei, die betrachtete Ausgangsgröße Y des untersuchten Simulationsmodells additiv mit einer Funktion von zusätzlichen unabhängigen stochastischen Variablen X_{k+1}, \dots, X_{k+m} mit integrierbaren zugehörigen Dichtefunktionen $p_{k+1}(X_{k+1}), \dots, p_{k+m}(X_{k+m})$ zu erweitern

$$\tilde{Y} = Y + g(\tilde{\mathbf{X}}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{X}} = [X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{k+m}]^T \quad (4.7)$$

$$\text{und} \quad g(\tilde{\mathbf{X}}) = g_1(X_{k+1}) \cdot g_2(X_{k+2}) \cdot \dots \cdot g_m(X_{k+m}) \quad . \quad (4.8)$$

Dabei sind die einzelnen Terme der Erweiterungsfunktion $g(\tilde{\mathbf{X}})$ so zu wählen, dass die Sensitivitätsmaße $S_{H_{k+1}}, \dots, S_{H_{k+m}}$ und $S_{T_{k+1}}, \dots, S_{T_{k+m}}$ der zusätzlich eingeführten Zufallsgrößen semianalytisch exakt berechnet werden können. Die Differenz zwischen den semianalytisch und stochastisch ermittelten Schätzwerten wird für die Herleitung eines adäquaten Fehlermaßes verwendet.

Dabei wird die Hypothese aufgestellt, dass die absoluten Fehler eines statistischen Schätzverfahrens für die Sensitivitätsmaße der Parameter \mathbf{X} des Simulationsmodells und der zusätzlich eingeführten Größen $\tilde{\mathbf{X}}$ von gleicher Größenordnung sind. Dies wird im Allgemeinen erfüllt, wenn der Verschiebungsterm $g(\tilde{\mathbf{X}})$ so gewählt wird, dass die Wechselwirkungsbeziehungen des untersuchten Simulationsmodells adäquat in den Zusatztermen abgebildet werden.

Aus der Konvergenz der geschätzten Sensitivitätsmaße für die zusätzlich eingeführten Variablen lässt sich aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der Variablen nicht

auf eine gleichermaßen gute Approximation der entsprechenden Terme der eigentlichen Modellparameter schließen. Allerdings kann die Komplexität bezüglich der Wechselwirkungseffekte von $g(\tilde{\mathbf{X}})$ vorgegeben werden (beispielsweise über die Verwendung der Sobol'-G-Funktion (Anhang B.1)). Aus der genannten Hypothese folgt die Annahme: Bei höherer Komplexität in den Wechselwirkungseffekten von $g(\tilde{\mathbf{X}})$ gegenüber $Y = f(\mathbf{X})$ gilt, dass die Abschätzung statistischer Maße bezüglich der Parameter \mathbf{X} mindestens genauso gut ist wie die entsprechende Approximation bezüglich der Variablen $\tilde{\mathbf{X}}$.

Die Vorgehensweise soll anhand von zwei einfachen Transformationen der Form $g(\tilde{\mathbf{X}}) = X_{k+1}$ und $g(\tilde{\mathbf{X}}) = X_{k+1} \cdot X_{k+2}$ erläutert werden. Es gelten für den ersten Fall folgende Zusammenhänge

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}|X_{k+1}) = \mathbb{E}(Y + X_{k+1}|X_{k+1}) = \mathbb{E}(Y) + x_{k+1} \quad , \quad (4.9)$$

$$\text{Var} \left[\mathbb{E}(\tilde{Y}|X_{k+1}) \right] = \text{Var} [\mathbb{E}(Y) + x_{k+1}] = \text{Var} [X_{k+1}] \quad , \quad (4.10)$$

$$\text{Var} [\tilde{Y}] = \text{Var} [Y + X_{k+1}] = \text{Var} [Y] + \text{Var} [X_{k+1}] + \underbrace{\text{Cov}(Y, X_{k+1})}_{=0} \quad . \quad (4.11)$$

Der Haupteffekt des Parameters X_{k+1} lässt sich damit semianalytisch berechnen

$$S_{H_{k+1}} = \frac{\text{Var} \left[\mathbb{E}(\tilde{Y}|X_{k+1}) \right]}{\text{Var} [\tilde{Y}]} = \frac{\text{Var} [X_{k+1}]}{\text{Var} [Y] + \text{Var} [X_{k+1}]} \quad . \quad (4.12)$$

Die Bestimmung des Terms $\text{Var} [Y]$ erfolgt statistisch über die korrigierte Stichprobenvarianz, da der exakte Wert nicht bekannt ist. Alle anderen Terme lassen sich anhand der bekannten Dichtefunktion von X_{k+1} analytisch berechnen. Dies führt zur Bezeichnung der semianalytischen Lösung. Weiterhin gilt für die gegebene Transformation der Zusammenhang $S_{H_{k+1}} = S_{T_{k+1}}$.

Für den Fall $g(\tilde{\mathbf{X}}) = X_{k+1} \cdot X_{k+2}$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y + X_{k+1} \cdot X_{k+2}|X_{k+1}) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega^k} \cdots \int (y + x_{k+1} \cdot x_{k+2}) \cdot p_{k+2}(X_{k+2}) \cdot \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, d\Omega^k \, dx_{k+2} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega^k} \cdots \int y \cdot \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, d\Omega^k}_{=\mathbb{E}(Y)} \cdot p_{k+2}(X_{k+2}) \, dx_{k+2} \cdots \\ &\quad + x_{k+1} \cdot \underbrace{\int_{\Omega^k} \cdots \int \int_{-\infty}^{\infty} x_{k+2} \cdot p_{k+2}(X_{k+2}) \, dx_{k+2}}_{=\mathbb{E}(X_{k+2})} \cdot \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, d\Omega^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}(Y) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_{k+2}(X_{k+2}) \, dx_{k+2} \cdots}_{=1} \\
 &\quad + x_{k+1} \cdot \mathbb{E}(X_{k+2}) \cdot \underbrace{\int_{\Omega^k} \cdots \int \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, d\Omega^k}_{=1} \\
 &= \mathbb{E}(Y) + x_{k+1} \cdot \mathbb{E}(X_{k+2}) \quad , \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E}(Y + X_{k+1} \cdot X_{k+2} | X_{k+1})] \\
 &\stackrel{\text{Gl. (3.5b)}}{=} \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E}(Y) + X_{k+1} \cdot \mathbb{E}(X_{k+2})] \stackrel{(\text{Gl. 3.8b, 3.8c})}{=} \mathbb{E}(X_{k+2})^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1}] \quad , \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{V}\text{ar} [\tilde{Y}] = \mathbb{V}\text{ar} [Y + X_{k+1} \cdot X_{k+2}] \\
 &\stackrel{\text{Gl. (3.8c)}}{=} \mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1} \cdot X_{k+2}] + \underbrace{\mathbb{C}\text{ov}(Y, X_{k+1} \cdot X_{k+2})}_{=0} \quad . \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Die Haupteffekte lassen sich somit semianalytisch mit folgenden Ausdrücken berechnen

$$S_{H_{k+1}} = \frac{\mathbb{E}(X_{k+2})^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1}]}{\mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1} \cdot X_{k+2}]}, \quad S_{H_{k+2}} = \frac{\mathbb{E}(X_{k+1})^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+2}]}{\mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1} \cdot X_{k+2}]} \quad . \tag{4.16}$$

Zur Bestimmung des Totaleffekts wird der Term $\mathbb{E}(Y + X_{k+1} \cdot X_{k+2} | \mathbf{X}_{-(k+1)})$ umgeformt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y + X_{k+1} \cdot X_{k+2} | \mathbf{X}_{-(k+1)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} (y + x_{k+1} \cdot x_{k+2}) \cdot p_{k+1}(X_{k+1}) \, dx_{k+1} \\
 &= y + x_{k+2} \cdot \mathbb{E}(X_{k+1}) \quad , \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E}(Y + X_{k+1} \cdot X_{k+2} | \mathbf{X}_{-(k+1)})] &= \mathbb{V}\text{ar} [Y + X_{k+2} \cdot \mathbb{E}(X_{k+1})] \\
 &= \mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{E}(X_{k+1})^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+2}] \quad . \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Die Totaleffekte ergeben sich somit zu

$$S_{T_{k+1}} = 1 - \frac{\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E}(\tilde{Y} | \mathbf{X}_{-(k+1)})]}{\mathbb{V}\text{ar} [\tilde{Y}]} = 1 - \frac{\mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{E}(X_{k+1})^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+2}]}{\mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1} \cdot X_{k+2}]} \quad , \tag{4.19}$$

$$S_{T_{k+2}} = 1 - \frac{\mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{E}(X_{k+2})^2 \cdot \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1}]}{\mathbb{V}\text{ar} [Y] + \mathbb{V}\text{ar} [X_{k+1} \cdot X_{k+2}]} \quad . \tag{4.20}$$

Für den allgemeinen Fall einer funktionalen stochastischen Verschiebung $g(\tilde{\mathbf{X}})$ nach Gln. (4.7), (4.8) lassen sich die Formeln zur Berechnung der Sensitivitätsmaße analog

herleiten und es ergeben sich die Terme

$$S_{H_{k+j}} = \frac{\mathbb{E} \left(\frac{g(\tilde{\mathbf{X}})}{g_j(X_{k+j})} \right)^2 \cdot \text{Var} [g_j(X_{k+j})]}{\text{Var} [Y] + \text{Var} [g(\tilde{\mathbf{X}})]} \quad , \quad (4.21)$$

$$S_{T_{k+j}} = 1 - \frac{\text{Var} [Y] + \mathbb{E} (g_j(X_{k+j}))^2 \cdot \text{Var} \left[\frac{g(\tilde{\mathbf{X}})}{g_j(X_{k+j})} \right]}{\text{Var} [Y] + \text{Var} [g(\tilde{\mathbf{X}})]} \quad . \quad (4.22)$$

Die Sensitivitätsindizes der Parameter \mathbf{X} des Simulationsmodells bezogen auf die ursprüngliche Ausgangsgröße Y werden mit den bekannten Schätzfunktionen (Gln. (3.47), (3.49), (3.59) und (3.60)) approximiert. Dabei wird die Ausgangsgröße aus der Beziehung $Y = \tilde{Y} - g(\tilde{\mathbf{X}})$ berechnet.

Anhand der vorgestellten Methode der stochastischen Verschiebung lassen sich einfache Fehlermaße ableiten. Der absolute Fehler berechnet sich zu

$$\varepsilon_{abs,H/T,j} = S_{H/T_{k+j}} - \hat{S}_{H/T_{k+j}} \quad . \quad (4.23)$$

Der relative Fehler lässt sich durch

$$\epsilon_{rel,H/T,j} = \frac{|S_{H/T_{k+j}} - \hat{S}_{H/T_{k+j}}|}{S_{H/T_{k+j}}} \quad (4.24)$$

angeben.

Mit dem beschriebenen Ansatz einer funktionalen stochastischen Verschiebung ist es möglich, unabhängig von der Wahl des Schätzverfahrens und der Stichprobengenerierung, ein absolutes Fehlermaß anzugeben. Unbekannt ist allerdings, welchen Einfluss die Wahl des Zusatzterms $g(\tilde{\mathbf{X}})$ auf die Effizienz der Fehlerabschätzung hat. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Funktionalität lediglich anhand einfacher Verschiebungsterme untersucht werden. Der zusätzliche Rechenaufwand ist in der Regel vernachlässigbar, da als stochastische Verschiebung einfache analytische Funktionen gewählt werden.

An dieser Stelle wird vorweggenommen, dass die Ergebnisse der Implementierung einer derartigen Fehlerbewertung in den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Sensitivitätsanalysen nicht zufriedenstellend waren. Die tatsächlichen Fehler werden unterschätzt. Der wesentliche Grund hierfür liegt dabei in einer ungenügenden Wahl der Verschiebungsfunktion $g(\tilde{\mathbf{X}})$. Aufgrund der vielversprechenden Möglichkeiten wurden Transformationen basierend auf Sobol'-G-Funktionen eingesetzt. Diese sind allerdings, zumindest in der implementierten Form, für die betrachteten Systeme nicht geeignet.

In folgenden Forschungsarbeiten wird die Frage zu klären sein, ob sich eine Verbesserung der Methodik durch Verwendung von anderen funktionalen Transformationen erreichen lässt und ob eine Systematik zur Identifizierung geeigneter Erweiterungsfunktionen anhand des betrachteten Systems abgeleitet werden kann.

5 Sensitivitätsanalyse eines Ein-Masse-Schwingers

5.1 Systemformulierung

Als erstes einfaches Anwendungsbeispiel wird ein Ein-Masse-Schwinger mit Fußpunkt-erregung (Bild 5.1) betrachtet. Das System mit der Federsteifigkeit k , Dämpfungskonstante d und Masse m bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung auf einem unebenen Untergrund. Die wegabhängige Fußpunkterregung wird über die Auslenkung z_{Fp} beschrieben. Dabei wird angenommen, dass sich diese aus der Summe von harmonischen Funktionen zusammensetzt

$$z_{\text{Fp}}(x) = \sum_{i=1}^p A_i \cdot \sin(2\pi n_i v t + \varphi_i) \quad . \quad (5.1)$$

Die Variable A_i stellt die Amplitude des i -ten Anteils dar, n_i und φ_i bezeichnen die zugehörige auf den Weg x bezogene Frequenz und den Phasenwinkel.

Als Maß für die Belastung wird die Vertikalbeschleunigung des Systems \ddot{z} betrachtet. Untersucht werden soll der Einfluss der verschiedenen streuenden Parameter. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{z} + d\dot{z} + kz = d\dot{z}_{\text{Fp}} + kz_{\text{Fp}} \quad . \quad (5.2)$$

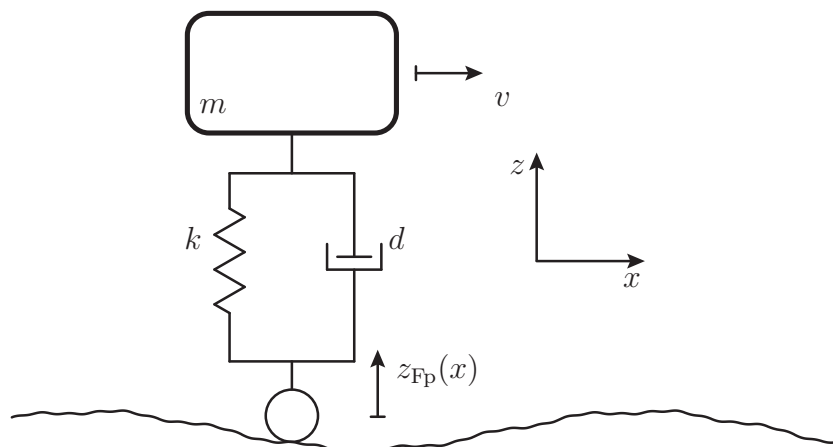


Bild 5.1: Fußpunkterregter Ein-Masse-Schwinger

Setzt man Gl. (5.1) in Gl. (5.2) ein, so ergibt sich die rechte Seite zu

$$\begin{aligned}
 & d \cdot \sum_{i=1}^p 2\pi n_i v \cdot A_i \cdot \cos(2\pi n_i v t + \varphi_i) + k \cdot \sum_{i=1}^p A_i \cdot \sin(2\pi n_i v t + \varphi_i) \\
 &= \sum_{i=1}^p A_i \cdot \underbrace{\sqrt{k^2 + 4(\pi d n_i v)^2}}_{=F_i} \cdot \cos \left(\underbrace{2\pi n_i v t}_{=\Omega_i} + \underbrace{\varphi_i - \arctan\left(\frac{k}{2\pi d n_i v}\right)}_{=\psi_i} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^p F_i \cdot \cos(\Omega_i t + \psi_i) \quad .
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die Bewegungsgleichung Gl. (5.2) lässt sich über einen Ansatz vom Typ der rechten Seite lösen und es ergibt sich für die vertikale Auslenkung der Ausdruck

$$z = \sum_{i=1}^p \frac{F_i}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \zeta_i^2)^2 + 4D^2\zeta_i^2}} \cos \left(\Omega_i t + \psi_i - \arctan\left(\frac{2D\zeta_i}{1 - \zeta_i^2}\right) \right) \tag{5.4}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dem Lehrschen Dämpfungsmaß $D = \frac{d}{2m\omega_0}$ und dem Frequenzverhältnis $\zeta_i = \frac{\Omega_i}{\omega_0}$. Die in diesem Fall betrachtete Ausgangsgröße, die vertikale Beschleunigung der Masse, ergibt sich somit zu

$$\ddot{z} = \sum_{i=1}^p -\frac{F_i}{k} \underbrace{\frac{\Omega_i^2}{\sqrt{(1 - \zeta_i^2)^2 + 4D^2\zeta_i^2}}}_{V(\Omega_i, \zeta_i, D)} \cos \left(\Omega_i t + \psi_i - \arctan\left(\frac{2D\zeta_i}{1 - \zeta_i^2}\right) \right) \quad . \tag{5.5}$$

Diese besteht aus einem Amplitudenanteil, der sich aus einem Faktor $-\frac{F_i}{k}$ und der Vergrößerungsfunktion $V(\Omega_i, \zeta_i, D)$ zusammensetzt. Ein trigonometrischer Term als zweiter Bestandteil der Ausgangsgröße charakterisiert den zeitabhängigen Anteil der Systemantwort. Aus dem Argument ist ersichtlich, dass die Antwortfrequenz der Erregerfrequenz entspricht. Die anteilige Phasenverschiebung ψ_i resultiert aus der zusammengefassten Beschreibung der Fußpunktauslenkung und der zugehörigen ersten Ableitung (Gl. (5.3)). Der zweite Teil der Phasenverschiebung ergibt sich aus der Lösung der Bewegungsgleichung und der Kombination trigonometrischer Ausdrücke. An der Resonanzstelle $\zeta_i = 1$ resultiert daraus ein Phasensprung von $\pi/2$.

Insgesamt verfügt der untersuchte Ein-Masse-Schwinger über vier systemeigene Parameter m, k, d, v und $3 \cdot p$ anregungsspezifische Variablen A_i, n_i, φ_i . Schon im Vorfeld einer Sensitivitätsanalyse dieses einfachen Systems sind einige zu erwartende Ergebnisse bekannt. Beispielsweise wird der Dämpfungsparameter d sicherlich einen größeren Einfluss auf die induzierten Belastungen ausüben als die Federsteifigkeit. Weiterhin wird eine Anregungsfrequenz Ω_i nahe der Resonanzfrequenz zu einer Überhöhung der auftretenden Beschleunigungen führen. Wie sehr sich diese jedoch in Kombination mit der Dämpfung

ausprägt, ist unter Berücksichtigung der streuenden Parameterwerte m, k, v, n_i , unbekannt. Die anregungsspezifischen Phasenverschiebungen φ_i werden lediglich einen sehr geringen Einfluss auf die betrachtete Ausgangsgröße ausüben.

Anhand dieses einfachen dynamischen Struktursystems wird in diesem Kapitel eine adäquate Anwendung der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse demonstriert. Damit werden die bekannten zu erwartenden Ergebnisse quantifiziert. Verschiedene verfügbare Methoden der Stichprobenerstellung und Berechnung der Sensitivitätsmaße werden implementiert und miteinander verglichen. Die im vorherigen Kapitel besprochenen Möglichkeiten der Fehlerbewertung werden ebenfalls eingesetzt. Weiterhin findet ein Vergleich mit konventionellen Verfahren der globalen Sensitivitätsanalyse statt, die in einigen weit verbreiteten CAE-Softwarepaketen verwendet werden. Abschließend wird eine Zusammenfassung der Ergebnisse des Kapitels gegeben.

5.2 Sensitivitätsanalyse

Stellt man die Vertikalbeschleunigung \ddot{z} in Abhängigkeit von den einzelnen Eingangsparametern (Tabelle 5.1) dar, so ergibt sich aus Gl. (5.5) folgender Ausdruck¹

$$\begin{aligned} \ddot{z}(\mathbf{x}, t) = & 4\pi^2 \sum_{i=1}^p \frac{x_{i,3+2} \cdot x_{i,3+3}^2 \cdot x_4^2 \sqrt{x_2^2 + 4\pi^2 x_3^2 \cdot x_4^2 \cdot x_{i,3+3}^2}}{x_2 \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2 x_1^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 \cdot x_{i,3+3}^2}{x_2^2} + \left(1 - \frac{4\pi^2 x_1^2 \cdot x_4^2 \cdot x_{i,3+3}^2}{x_2^2}\right)^2}} \cdot \dots \\ & \cos\left(-2\pi x_4 \cdot x_{i,3+3} \cdot t + \arctan\left(\frac{2\pi x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_{i,3+3}}{x_2^2 - 4\pi^2 x_1^2 \cdot x_4^2 \cdot x_{i,3+3}^2}\right) + \dots \right. \\ & \left. \arctan\left(\frac{x_2}{2\pi x_3 \cdot x_4 \cdot x_{i,3+3}}\right) - x_{i,3+4}\right) \quad . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Im Folgenden wird die Fußpunktanregung mit $p = 3$ trigonometrischen Termen zur Beschreibung von hohen, mittleren und kleinen Bodenunebenheiten modelliert. Hierbei wird angenommen, dass Unebenheiten mit großer Amplitude eine niedrige Frequenz aufweisen. Die gewählten Werte für die systemeigenen Parameter (Tabelle 5.1) orientieren sich an einem Viertelfahrzeugmodell. Als Verteilungsfunktion wird für alle Variablen die Gleichverteilung zugrunde gelegt.

Als sinnvolle zeitunabhängige Ausgangsgrößen zur Beurteilung der dynamischen Belastung des Systems bieten sich die Antwortfrequenzen Ω_i und die Amplituden der einzelnen

¹Die Darstellung der Variablen mit Kleinbuchstaben entspricht dabei der in der Stochastik üblichen Kennzeichnung spezifischer Realisationen von Zufallsvariablen. In einem allgemeinen Kontext, beispielsweise in Tabelle 5.1, werden diese durch Großbuchstaben symbolisiert.

Parameter	Beschreibung	Dichtefunktion
$X_1 \hat{=} m$	Masse in kg	$X_1 \sim \mathcal{U}(200; 400)$
$X_2 \hat{=} k$	Federsteifigkeit in N/m	$X_2 \sim \mathcal{U}(18000; 22000)$
$X_3 \hat{=} d$	Dämpfungskonstante in Ns/m	$X_3 \sim \mathcal{U}(1000; 1500)$
$X_4 \hat{=} v$	Geschwindigkeit in m/s	$X_4 \sim \mathcal{U}(5; 10)$
$X_5 \hat{=} A_1$	Anregungsamplitude 1 in m	$X_5 \sim \mathcal{U}(0,04; 0,08)$
$X_6 \hat{=} n_i$	Frequenz 1 in 1/m	$X_6 \sim \mathcal{U}(0,2; 1)$
$X_7 \hat{=} \varphi_1$	Phasenverschiebung 1	$X_7 \sim \mathcal{U}(0; 2\pi)$
$X_8 \hat{=} A_2$	Anregungsamplitude 2 in m	$X_8 \sim \mathcal{U}(0,02; 0,04)$
$X_9 \hat{=} n_2$	Frequenz 2 in 1/m	$X_9 \sim \mathcal{U}(1; 2,5)$
$X_{10} \hat{=} \varphi_2$	Phasenverschiebung 2	$X_{10} \sim \mathcal{U}(0; 2\pi)$
$X_{11} \hat{=} A_3$	Anregungsamplitude 3 in m	$X_{11} \sim \mathcal{U}(0,005; 0,02)$
$X_{12} \hat{=} n_3$	Frequenz 3 in 1/m	$X_{12} \sim \mathcal{U}(1; 10)$
$X_{13} \hat{=} \varphi_3$	Phasenverschiebung 3	$X_{13} \sim \mathcal{U}(0; 2\pi)$

Tabelle 5.1: Eingangsparameter und zugehörige Dichtefunktionen

Anteile (Gl. (5.5)) an. Zur Bewertung des transienten Verhaltens wird der zeitliche Mittelwert sowie die zeitliche Standardabweichung der Absolutbeträge der Systemantwort herangezogen.²

Im Folgenden werden diese acht Ausgangsgrößen betrachtet

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \Omega_1 = 2\pi n_1 v \quad , \quad Y_2 = \Omega_2 = 2\pi n_2 v \quad , \quad Y_3 = \Omega_3 = 2\pi n_3 v \quad , \\
Y_4 &= -\frac{F_1}{k} \frac{\Omega_1^2}{\sqrt{(1 - \zeta_1^2)^2 + 4D^2\zeta_1^2}} \quad , \quad Y_5 = -\frac{F_2}{k} \frac{\Omega_2^2}{\sqrt{(1 - \zeta_2^2)^2 + 4D^2\zeta_2^2}} \quad , \\
Y_6 &= -\frac{F_3}{k} \frac{\Omega_3^2}{\sqrt{(1 - \zeta_3^2)^2 + 4D^2\zeta_3^2}} \quad , \\
Y_7 &= \mathbb{E}(|\ddot{z}|) \quad , \quad Y_8 = \sqrt{\text{Var}[|\ddot{z}|]} \quad .
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Zur Berechnung von Y_7 und Y_8 wurden transiente Simulationen bis $t_{max} = 5$ s mit einer Diskretisierung von $\Delta t = 10^{-5}$ s durchgeführt.

Eine analytische Bestimmung der varianzbasierten Sensitivitätsmaße ist bereits für dieses einfache Beispiel lediglich für die Ausgangsvariablen Y_1, Y_2, Y_3 möglich. Für Y_4 bis Y_8 ist keine analytische Lösung der zu berechnenden Integralterme (Gln. (3.16a) – (3.25c)) verfügbar. Die entsprechenden Sensitivitätsmaße müssen somit mit den vorgestellten statistischen (Gln. (3.47) – (3.49)) oder spektralen (Gln. (3.59), (3.60)) Schätzverfahren approximiert werden.

²Der quadratische zeitliche Mittelwert (**R**oot-**M**ean-**S**quare-**V**alue) einer oszillierenden Größe, hier in Form der Quadratwurzel wiedergegeben durch den Mittelwert der Absolutbeträge, gilt im Allgemeinen als Maß für die Rauigkeit eines Signals und wird als Effektivwert bezeichnet.

		X_4	X_6	X_9	X_{12}
Y_1	S_H	0,1942	0,7770	0	0
	S_T	0,2230	0,8058	0	0
Y_2	S_H	0,3684	0	0,6090	0
	S_T	0,3910	0	0,6316	0
Y_3	S_H	0,1380	0	0	0,8312
	S_T	0,1688	0	0	0,8620

Tabelle 5.2: Analytisch berechnete Haupt- und Totaleffekte für Y_1, Y_2, Y_3

5.2.1 Statistische Schätzung der Sensitivitätsmaße

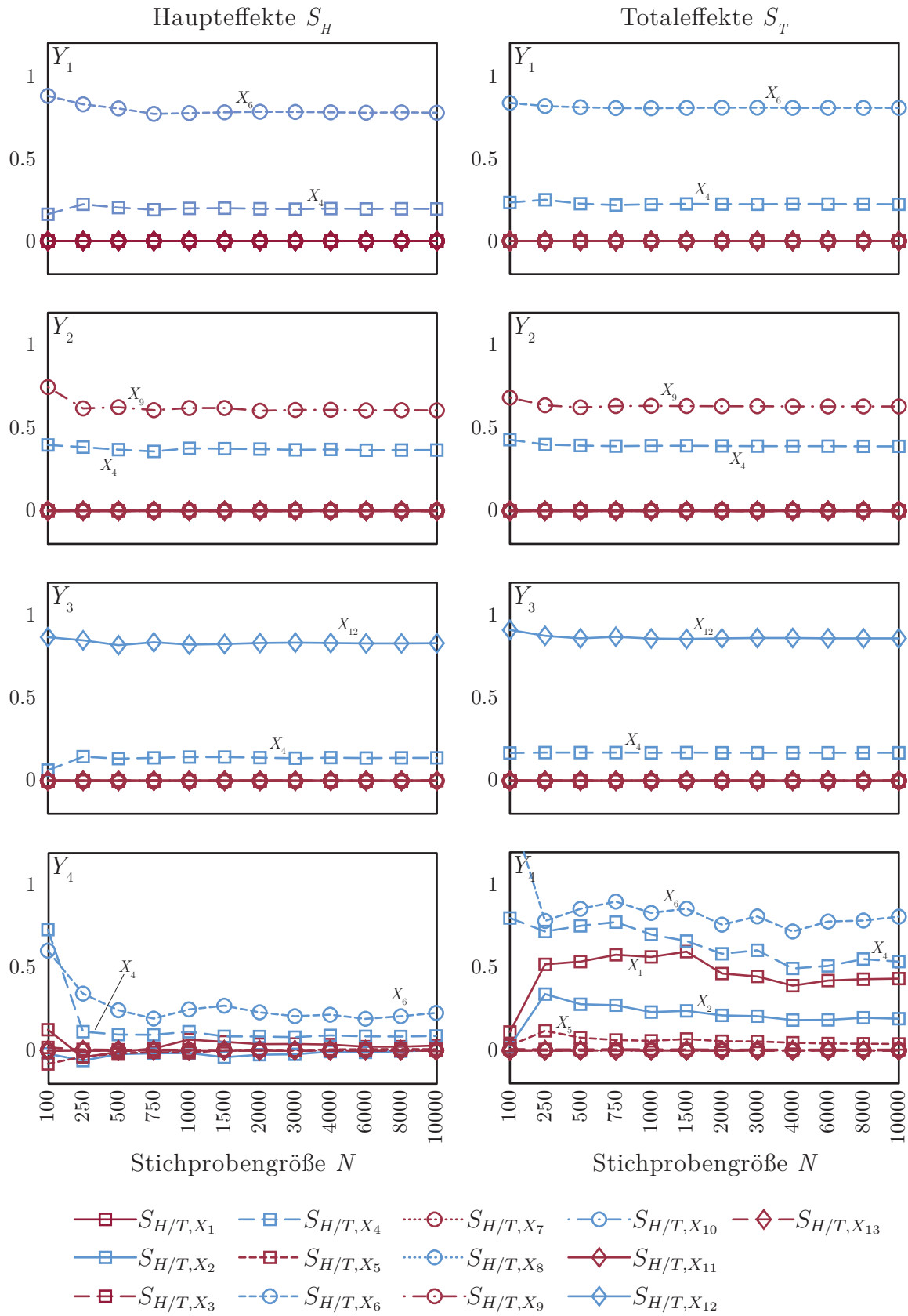
In den Bildern 5.2 und 5.3 sind die statistischen Schätzungen der Haupt- und Totaleffekte über den Stichprobenumfang N für alle $k = 13$ Eingangsparameter und acht Ausgangsgrößen Y_1 bis Y_8 dargestellt. Zur Generierung der Stichproben für die Monte-Carlo-Simulationen wurden verschiedene Strategien (Latin-Hypercube-Sampling mit Maximierung der minimalen Distanz, Pseudo- und Quasizufallszahlengenerator, Anhang C) eingesetzt. Abgebildet sind die Ergebnisse von Stichproben bestehend aus Sobol'-Sequenzen. Weiterhin wurde für die Berechnung der Totaleffekte die Schätzfunktion von Jansen (Gl. 3.49) implementiert. Ein Vergleich mit anderen Samplingmethoden und Schätzverfahren wird im nächsten Abschnitt diskutiert. Die Anzahl an benötigten Berechnungen des zugrunde liegenden Simulationsmodells ergibt sich aus der Stichprobengröße N und der Eingangsparameter k über den Zusammenhang $N \cdot (k + 2)$.

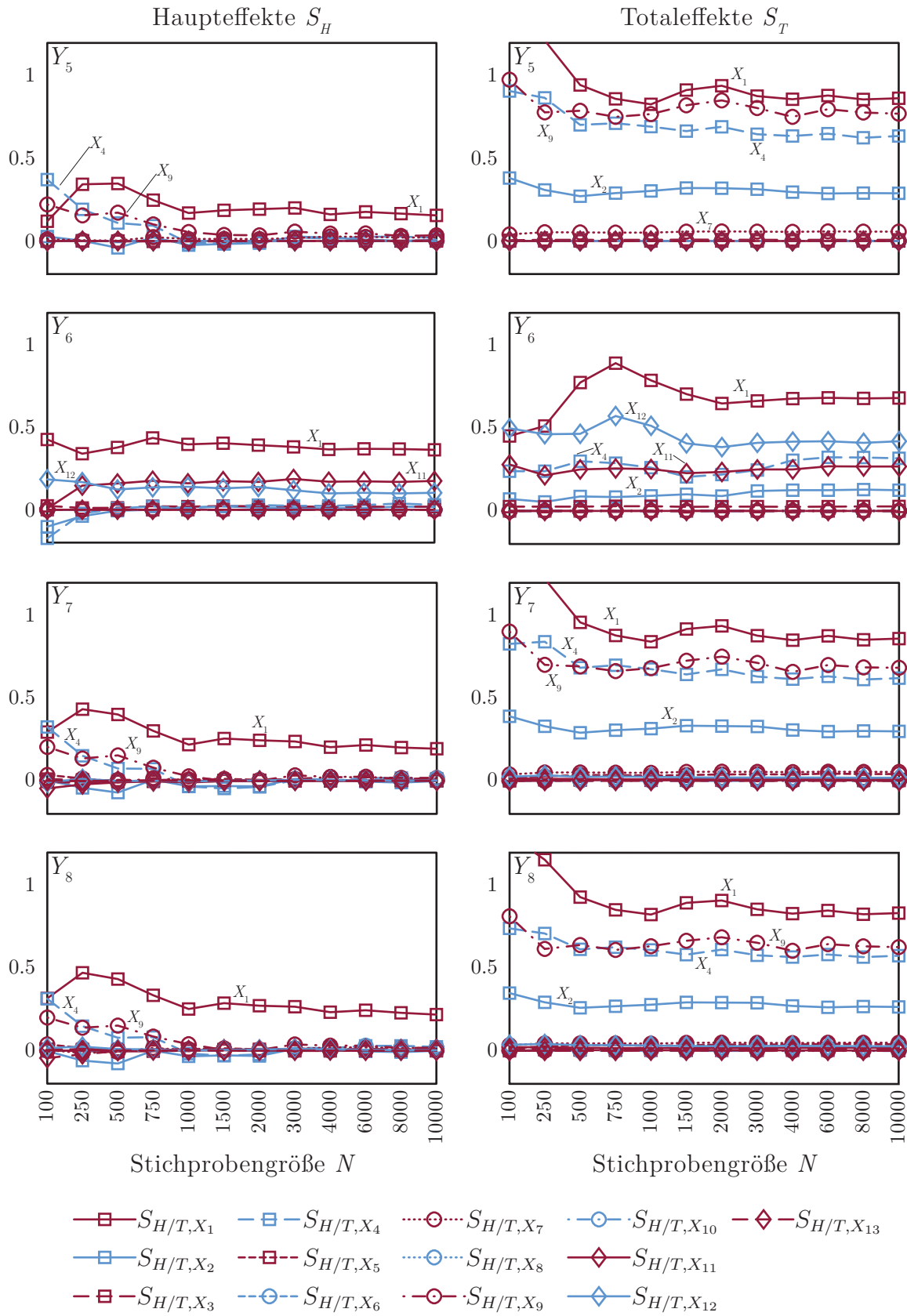
Werden als Ausgangsgrößen die Anregungsfrequenzen Y_1, Y_2 und Y_3 betrachtet, so lassen sich die zugehörigen Sensitivitätsmaße analytisch berechnen.³ Die entsprechenden Werte sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst. Alle nicht aufgeführten Sensitivitätsmaße sind in diesen Fällen gleich Null.

Für derartige mathematisch einfach zu formulierende Ausgangsgrößen wird eine relativ schnelle stochastische Konvergenz erreicht. Ab einer Stichprobengröße von $N = 1000$ werden alle Haupt- und Totaleffekte annähernd exakt unter Verwendung der beschriebenen Schätzverfahren approximiert. Dies wird auch quantitativ durch Betrachtung der absoluten Fehler belegt. In Tabelle 5.3 sind exemplarisch für die Ausgangsgröße Y_1 die ermittelten absoluten Fehler bis zu einer Stichprobengröße von $N = 3000$ dargestellt.

Gleichzeitig wird der hohe benötigte Simulationsaufwand verdeutlicht. Ist man an einer quantitativ exakten Sensitivitätsanalyse interessiert, so sind schon für die betrachteten einfachen Ausgangsgrößen Y_1, Y_2, Y_3 mindestens $N \cdot (4 + 2) = 6000$ Berechnungen des Simulationsmodells notwendig, wobei hier bereits das Vorwissen berücksichtigt ist, dass lediglich vier Eingangsparameter einen Einfluss auf die Systemgrößen ausüben.

³Die Vorgehensweise wird in Anhang B, S. 125 exemplarisch für die Sobol'-G-Testfunktion dargestellt.


 Bild 5.2: Statistische Schätzung der Haupt- und Totaleffekte für Y_1 bis Y_4

Bild 5.3: Statistische Schätzung der Haupt- und Totaleffekte für Y_5 bis Y_8

$N =$	100	250	500	750	1000	1500	2000	3000
$\varepsilon_{S_{H,Y_1,X_4}}$	-0,0326	0,0276	0,0076	-0,0048	0,0029	0,0042	0,0008	-0,0018
$\varepsilon_{S_{H,Y_1,X_6}}$	0,1016	0,0506	0,0252	-0,0080	-0,0025	0,0025	0,0059	0,0047
$\varepsilon_{S_{T,Y_1,X_4}}$	0,0103	0,0260	0,0024	-0,0060	-0,0012	0,0015	-0,0001	-0,0006
$\varepsilon_{S_{T,Y_1,X_6}}$	0,0295	0,0108	0,0041	-0,0007	-0,0015	0,0005	0,0011	0,0018

Tabelle 5.3: Absolute Fehler $\varepsilon_{S_{H/T}}$ für Y_1 und X_4, X_6

Bei der Sensitivitätsanalyse der Größen Y_4 bis Y_8 fällt auf, dass bei Betrachtung des Totaleffekts bis zu fünf Parameter mit quantitativ relevantem Einfluss identifiziert werden. Gleichzeitig sind außer im Fall der Masse X_1 die zugehörigen Haupteffekte sehr klein. Dies weist auf einen stark nichtlinearen Zusammenhang hin.

Die Betrachtung eines absoluten Fehlers, indem die Differenz zwischen approximierten und exakten Sensitivitätsmaßen evaluiert wird, ist bei der Analyse der Ausgangsgrößen Y_4 bis Y_8 nicht möglich, da die entsprechenden Integralterme analytisch nicht lösbar sind. Die Konvergenz gegen einen stetigen Wert ist demnach in diesen Fällen lediglich qualitativ beurteilbar, indem die Schwankungen in den Sensitivitätsmaßen bei steigender Stichprobengröße betrachtet werden. Intuitiv scheint sich somit für die Haupteffekte eine stochastische Konvergenz ab einer Stichprobengröße von $N = 1000$ und für die Totaleffekte ab $N = 2000$ einzustellen. Die fehlende Information über die tatsächliche Approximationsgüte führt zur Notwendigkeit einer genauen Fehlerabschätzung, die in Abschnitt 5.3 erläutert wird.

5.2.2 Spektrale Berechnungsverfahren

Zur Bewertung der statistischen Verfahren wurde eine Vergleichsanalyse mit der spektralen ExFAST-Methode (Abschnitt 3.2.2, S. 30) durchgeführt. Hierbei spielt die Wahl der zu berücksichtigenden Anzahl an harmonischen Anteilen höherer Ordnung eine relevante Rolle. In der Literatur [83] wird eine Ordnung von $m = 4, 6$ oder 8 empfohlen. Zur Beurteilung der entstehenden Fehler werden die Ausgangsgrößen Y_1, Y_2 betrachtet und die bei unterschiedlichen Stichprobengrößen und Ordnungen ermittelten Sensitivitätsmaße mit den entsprechenden exakten Werten (Tabelle 5.2) verglichen (Bild 5.4).

Erwartungsgemäß fallen die Fehler bei Berücksichtigung einer großen Anzahl an höheren Harmonischen deutlich kleiner aus. Allerdings fällt beispielsweise bei der Betrachtung von $\varepsilon_{S_{H,Y_1,X_6}}$ und $\varepsilon_{S_{H,Y_2,X_9}}$ auf, dass sich die Fehler bei größer werdender Stichprobe nicht verringern. Selbst bei den mathematisch einfachen Ausgangsgrößen Y_1 und Y_2 und einer großen Stichprobe $N = 150000$ ist somit keine erwartungstreue Approximation der Sensitivitätsmaße gegeben. Die Ergebnisse für die Ausgangsgröße Y_3 entsprechen diesen

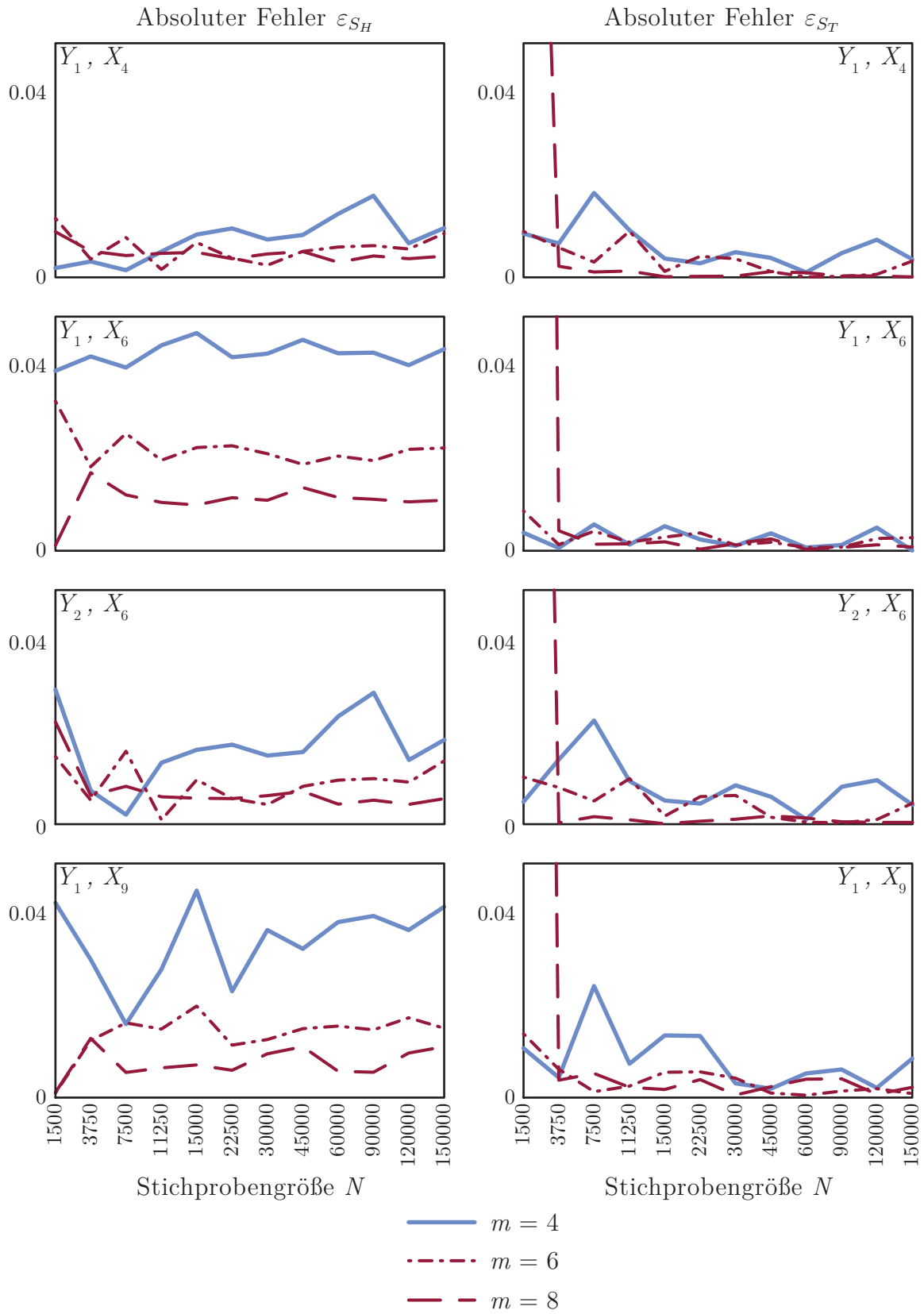


Bild 5.4: Absoluter Fehler der ExFAST-Approximationen der Haupt- und Totaleffekte für Y_1, Y_2 und X_4, X_6, X_9

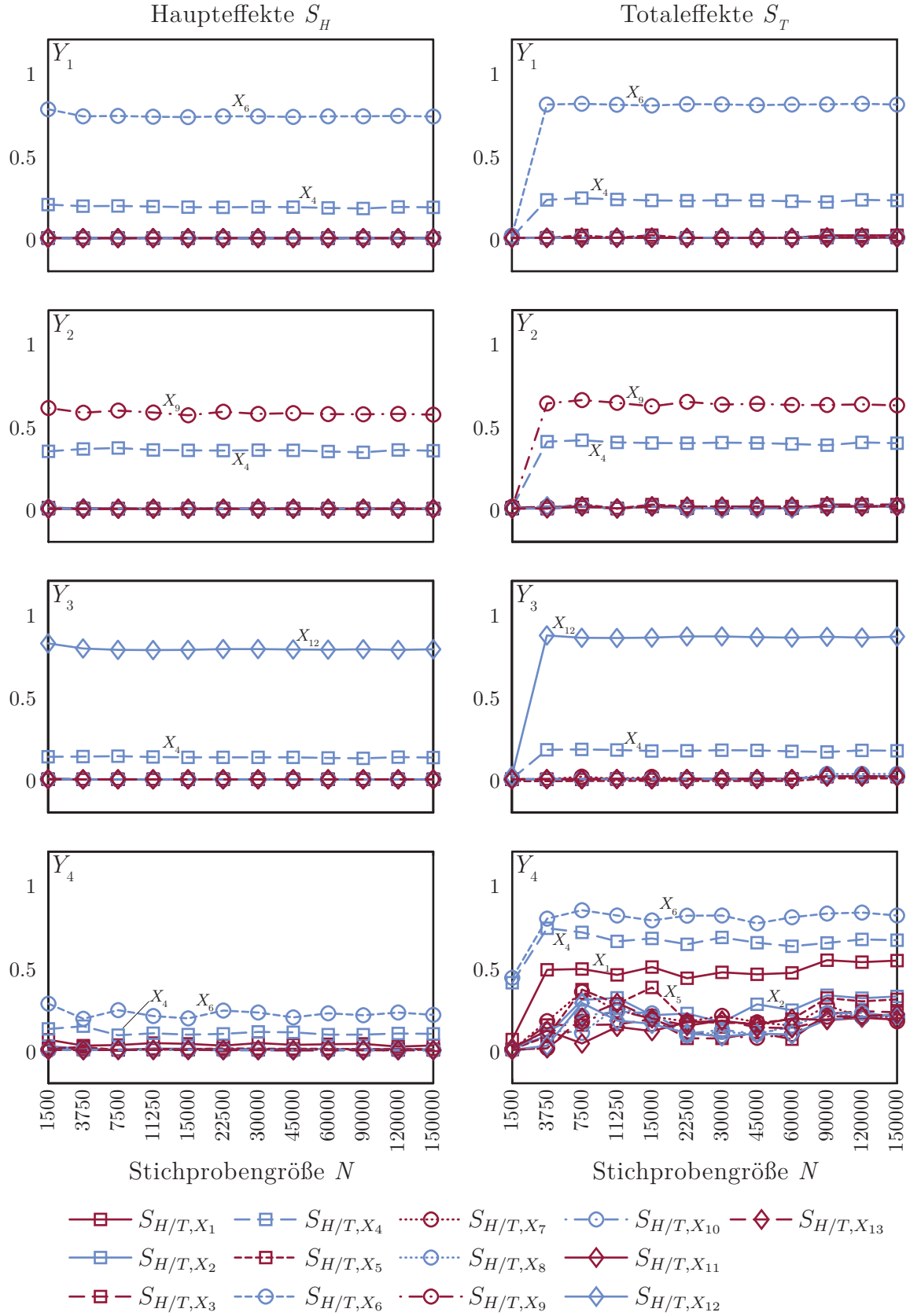


Bild 5.5: Schätzung der Haupt- und Totaleffekte mit der ExFAST-Methode ($m = 8$, keine Wiederholungen) für Y_1 bis Y_4

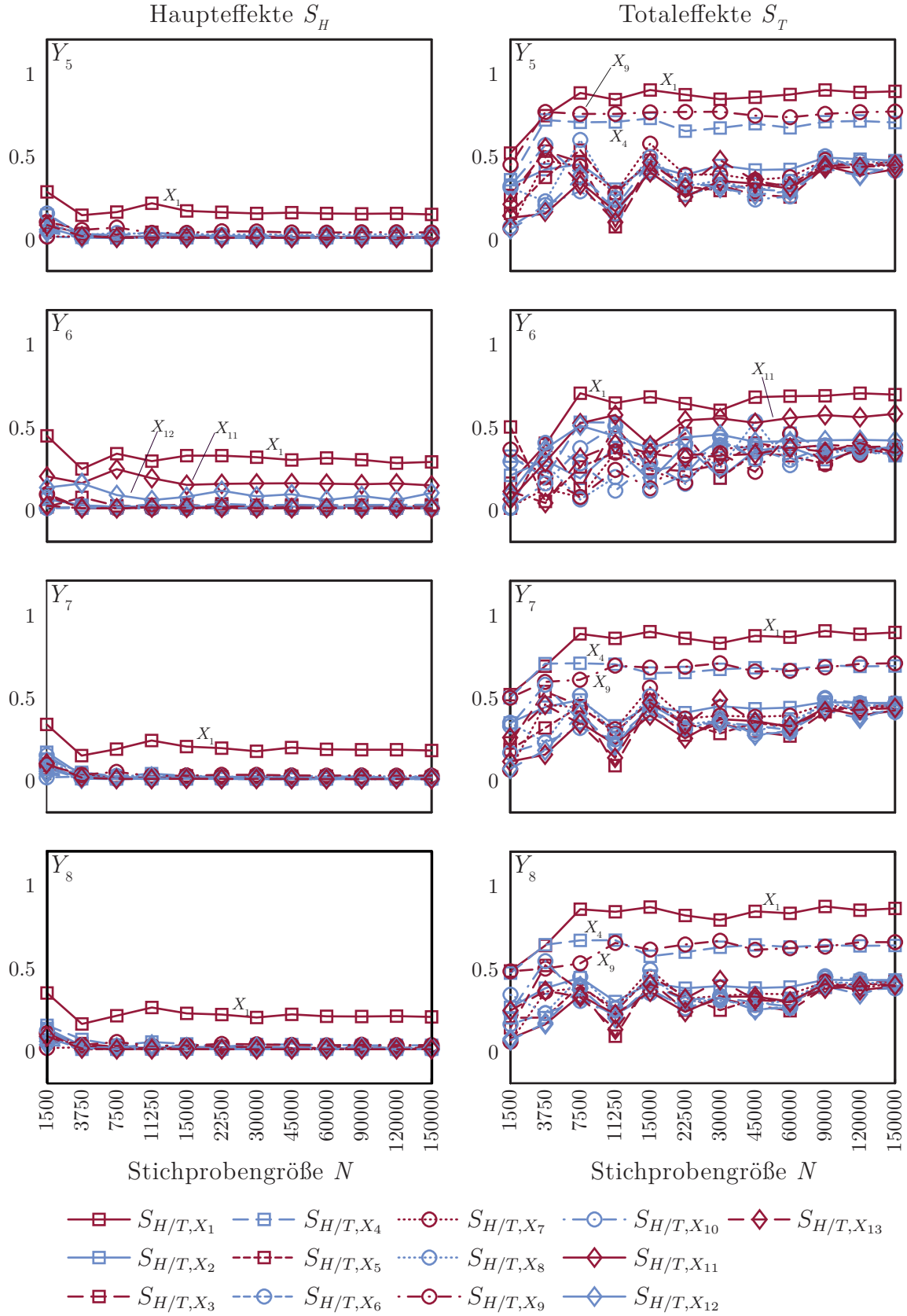


Bild 5.6: Schätzung der Haupt- und Totaleffekte mit der ExFAST-Methode ($m = 8$, keine Wiederholungen) für Y_5 bis Y_8

Aussagen. Im Folgenden werden aufgrund der kleinsten quantitativen Fehler die weiteren Ergebnisse bei Berücksichtigung von $m = 8$ höheren Harmonischen diskutiert.

In den Bildern 5.5 und 5.6 sind die entsprechenden berechneten Sensitivitätsmaße über die Größe der zugrunde liegenden Stichprobe aufgetragen. Diese sind so gewählt, dass der zugehörige Rechenaufwand vergleichbar ist mit den zuvor durchgeführten Monte-Carlo-Analysen.⁴

Es fällt auf, dass für die Ausgangsgrößen Y_4 bis Y_8 die betragsmäßig größten Haupteffekte ab einem Rechenaufwand von ca. 7500 Simulationsdurchläufen gegen einen konstanten Wert konvergieren. Somit erscheint die ExFAST-Methode effizienter zu sein als die zuvor dargestellte statistische Abschätzung der Sensitivitätsmaße. Allerdings hat die ExFAST-Methode eindeutige Schwierigkeiten, kleine Totaleffekte korrekt zu identifizieren. Dies geht aus den Ergebnissen für die Systemgrößen Y_4 bis Y_6 hervor. Beispielsweise gehen in die Größe Y_4 lediglich die Eingangsparameter X_1 bis X_6 ein. Demzufolge betragen die Totaleffekte für die Variablen X_7 bis X_{13} exakt Null. Während dieser Sachverhalt von den statistischen Verfahren richtig identifiziert wird (Bilder 5.2 und 5.3), ordnet die ExFAST-Methode den genannten Eingangsgrößen ein deutlich von Null verschiedenes Maß zu. In einem solchen Zusammenhang werden derartige Fehler als Typ-I-Fehler bezeichnet.⁵ Aufgrund dieser Typ-I-Fehler geht der Totaleffekt der Größe X_2 in den Ausgangsgrößen Y_4 bis Y_6 unter. Bei der Interpretation der Ergebnisse führt dies dazu, dass X_2 als irrelevant eingestuft wird. Dabei handelt es sich um einen Typ-II-Fehler.

Als weitere Möglichkeit zur spektralen Berechnung der Haupteffekte wurde ein RBD-Algorithmus (Abschnitt 3.2.2) mit $m = 8$ berücksichtigten höheren Harmonischen implementiert. Das RBD-Verfahren wird in der Literatur als eine sehr recheneffiziente Methode zur Berechnung der Sensitivitätsmaße erster Ordnung beschrieben [85]. Dies wird durch die hier erzielten Ergebnisse bestätigt (Bild 5.7). Dargestellt sind die für alle Ausgangsgrößen Y_1 bis Y_8 berechneten Haupteffekte für unterschiedliche Stichprobengrößen. Man erkennt, dass eine Konvergenz schon bei sehr kleinen Stichprobenumfängen (ab ca. $N = 500$) erreicht wird. Für die Ausgangsgrößen Y_1 bis Y_3 sind gleichzeitig die exakten Werte eingetragen. Es ist ersichtlich, dass auch die absoluten Fehler ebenfalls schon bei kleinen Stichproben vernachlässigbar werden. Da hier der Stichprobenumfang der Anzahl an benötigten Simulationsdurchläufen entspricht, ist im Vergleich zu den statistischen Approximationsverfahren der Rechenaufwand um den Faktor 20 geringer.

⁴Bei einer ExFAST-Analyse ist lediglich eine maximale Anzahl an Rechendurchläufen und die Anzahl an Wiederholungen vorzugeben. Da der Rechenaufwand für die Monte-Carlo-basierten Verfahren $N \cdot (k + 2)$ beträgt, wurden zur Festlegung der Stichprobengrößen für die ExFAST-Analysen die entsprechenden Werte mit dem Faktor 15 multipliziert.

⁵Im Kontext von Sensitivitätsanalysen wird von Typ-I-Fehlern gesprochen, wenn irrelevante Parameter fälschlicherweise als Einflussgrößen mit relevantem Einfluss identifiziert werden. Ein Typ-II-Fehler bezeichnet den Sachverhalt, wenn einflussreiche Parameter als nicht relevant eingestuft werden. Eine fehlerhafte Beschreibung des Streuverhaltens der Eingangsgrößen wird als Typ-III-Fehler bezeichnet.

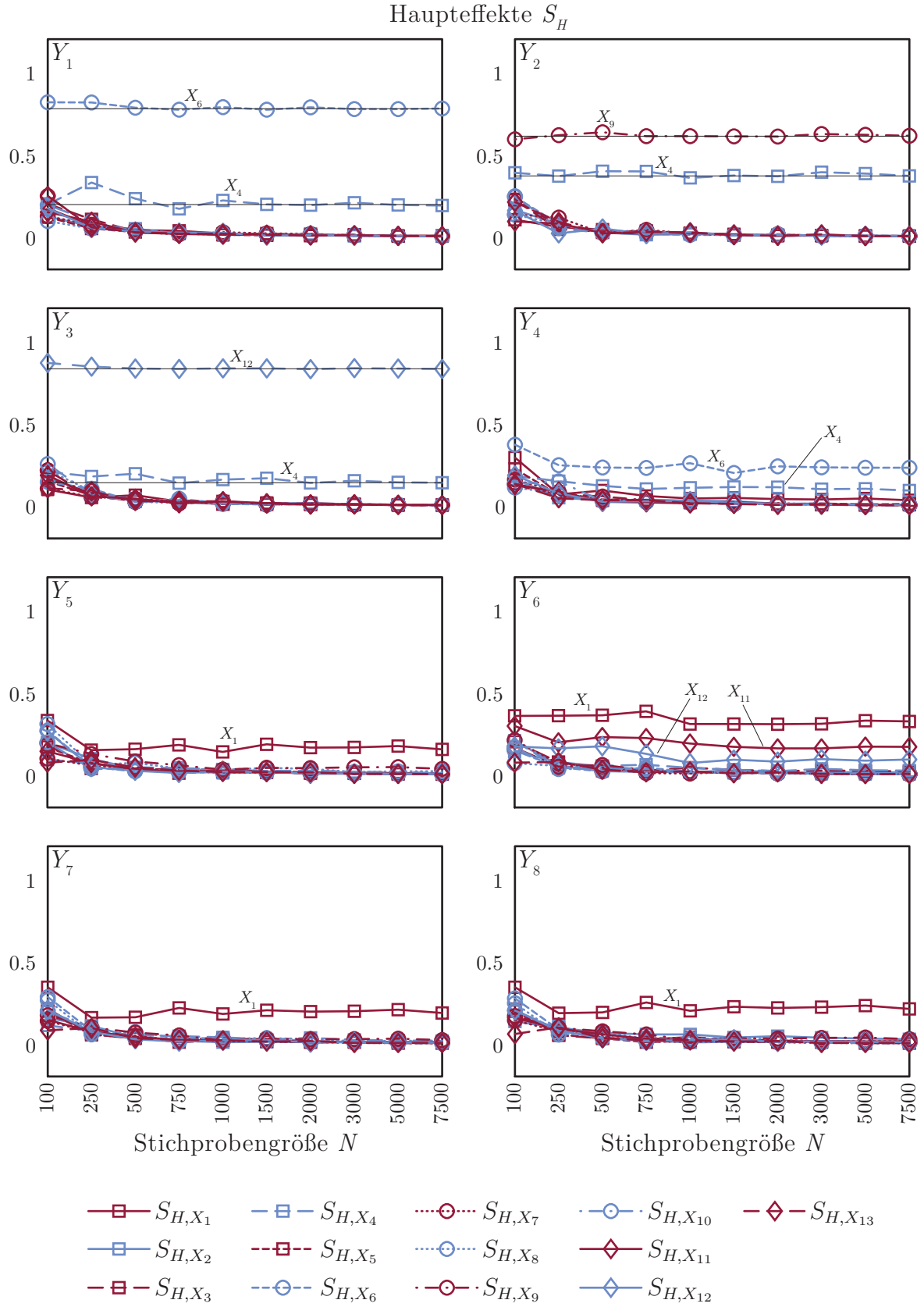


Bild 5.7: Schätzung der Haupteffekte mit der RBD-Methode ($m = 8$, keine Wiederholungen) für Y_1 bis Y_8

Offensichtlicher Nachteil dieses Verfahrens ist zum einen die fehlende Möglichkeit einer Fehlerapproximation. Prinzipiell ist zwar eine statistische Analyse der Berechnungsfehler möglich, allerdings wird hierfür eine Vielzahl⁶ an Wiederholungen benötigt und somit der Vorteil des geringen Rechenaufwands zunichte gemacht. Zweiter wesentlicher Nachteil ist die Beschränkung auf die Haupteffekte. Es ist insbesondere bei den betrachteten Größen Y_4 bis Y_8 ersichtlich, dass auch andere Eingangsparameter von Bedeutung sind. Deren Einfluss wird durch die Betrachtung des Haupteffekts noch nicht einmal qualitativ identifiziert. Beschränkt man sich auf derartige Analysen, so besteht wie im hier diskutierten Fallbeispiel die Möglichkeit Fehler vom Typ II zu begehen.

Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse, dass die statistischen Schätzverfahren basierend auf Monte-Carlo-Simulationen zu eindeutigen Ergebnissen ohne Typ-I- oder Typ-II-Fehler bei großem Rechenaufwand führen. Dieser ist allerdings bei der Analyse realer Systeme oft eingeschränkt, was die Implementierung einer geeigneten aussagefähigen Fehlerabschätzung ohne zusätzlichen Aufwand erforderlich macht. Hierzu wird im folgenden Abschnitt die Anwendung der in Kapitel 4 beschriebenen Ansätze vorgestellt.

5.3 Untersuchung der Schätzfehler

Die quantitative Beurteilung der Schätzfehler spielt in der praxisnahen Implementierung der beschriebenen Verfahren eine entscheidende Rolle. Wesentliche Ursache ist die in der Regel begrenzte Verfügbarkeit an Rechenzeit und der hieraus resultierende Aufwand. Dieser Sachverhalt wird sowohl in der wissenschaftlichen Literatur als auch in kommerziell verfügbaren Softwarepaketen [98] vernachlässigt.

Im Folgenden wird als erster Schritt der Fehleranalyse die stochastische Konvergenz betrachtet und bewertet. Über das Verfahren des Bootstrap-Resamplings wird als Zweites der Streubereich der Ergebnisse analysiert. Abschließend wird über das Verfahren der funktionalen stochastischen Verschiebung eine Quantifizierung des Fehlers bezüglich zusätzlich eingeführter Variablen durchgeführt.

Gleichzeitig wird die Praxistauglichkeit gewährleistet, indem auf einen möglichst geringen Mehraufwand an Rechenkosten geachtet wird. Es sind keine zusätzlichen Simulationsdurchläufe des analysierten Systems notwendig.

5.3.1 Beurteilung der stochastischen Konvergenz

Zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens wird die in Abschnitt 4.3 dargestellte Vorgehensweise implementiert. Die Ergebnisse der Konvergenzanalyse für das Beispiel des betrachteten Ein-Masse-Schwingers mit Stichprobengrößen $N_i = N_{i-1} + 100$ mit $N_1 = 100$

⁶Als empirischer Wert für eine repräsentative Stichprobengröße wird beispielsweise in [72] ein Wert von $n = 30$ genannt.

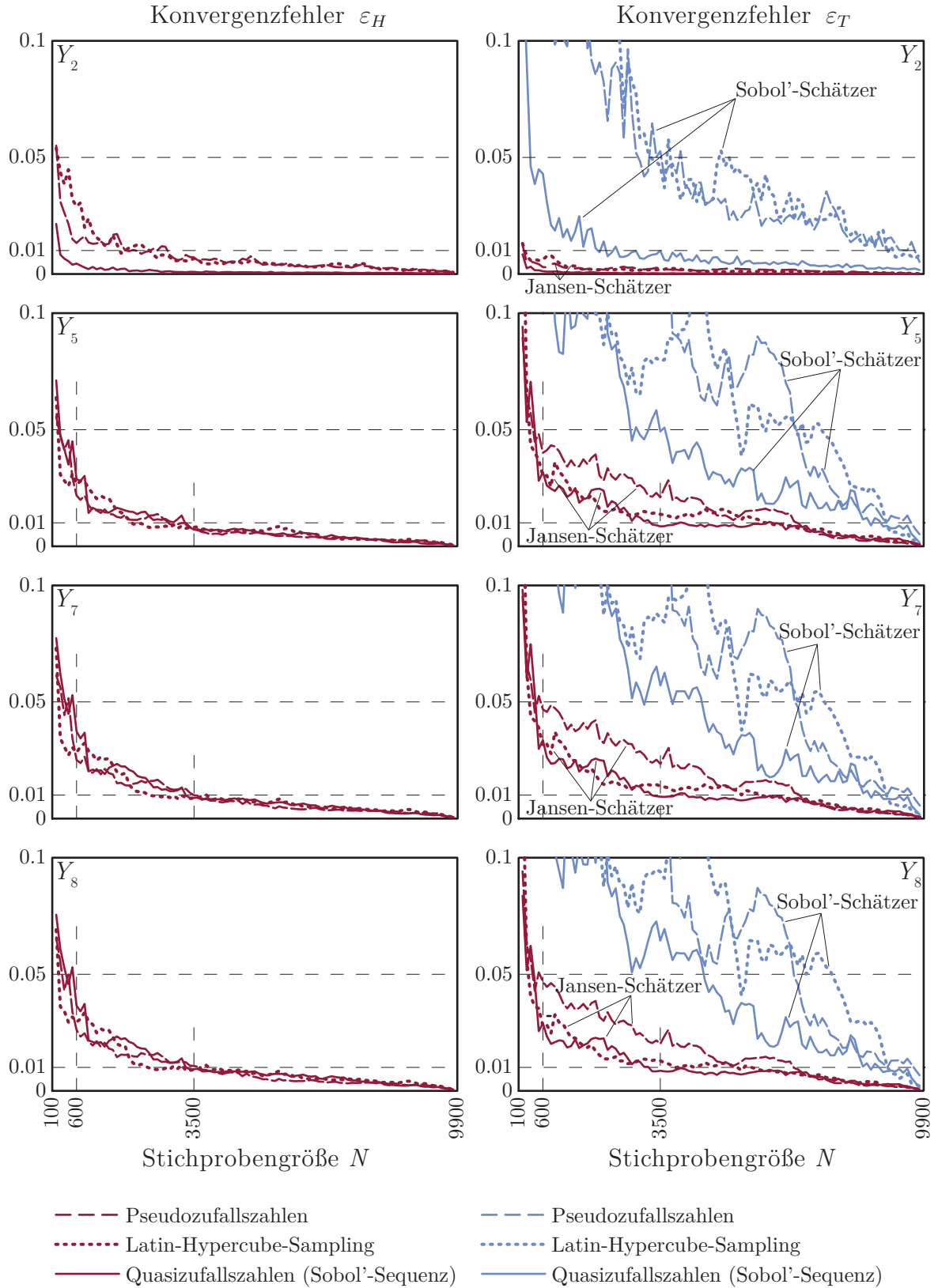


Bild 5.8: Konvergenzfehler ε_H und ε_T für Y_2, Y_5, Y_7 und Y_8 in Abhängigkeit von der Stichprobengröße mit unterschiedlichen Samplingmethoden und Schätzverfahren für den Totaleffekt

und $i = 2, 3, \dots, 99$ sind in Bild 5.8 beispielhaft für die Ausgangsgrößen Y_2, Y_5, Y_7 und Y_8 zusammengefasst. Es wurden dabei drei unterschiedliche Verfahren zur Stichprobenerstellung (Pseudozufallszahlen, Latin-Hypercube-Sampling, Sobol'-Sequenzen) sowie zwei unterschiedliche Methoden zur Approximation des Totaleffekts nach Sobol' (Gl. (3.48)) und Jansen (Gl. (3.49)) berücksichtigt.

Aus der Betrachtung der Konvergenzfehler geht hervor, dass die Wahl der Samplingmethode für die Haupteffekte nicht von großer Bedeutung zu sein scheint. Größere Unterschiede existieren bei den Totaleffekten, wobei augenscheinlich das Verfahren mit Pseudozufallszahlen am langsamsten konvergiert. Im direkten Vergleich erscheint die Verwendung von Sobol'-Sequenzen gegenüber der Anwendung des Latin-Hypercube-Samplings vorteilhaft zu sein. Neben einer relativ schnellen Konvergenz ist die Generierung von Subsamples anhand einer gegebenen Stichprobe wie zuvor beschrieben möglich. Gleichzeitig ist das Schätzverfahren für die Totaleffekte nach Sobol' deutlich schlechter als das von Jansen. Daher wurde zuvor die Diskussion der durchgeführten Sensitivitätsanalysen auf die Ergebnisse der Schätzung nach Jansen basierend auf Quasizufallszahlen mit Sobol'-Sequenzen beschränkt.

Insgesamt wird ein mittlerer relativer Konvergenzfehler von $\epsilon_{\max} = 0,05$ mit Quasizufallszahlen ab einer Stichprobengröße von etwa $N = 600$ und ein Fehlerwert von $\epsilon_{\max} = 0,01$ bei einer Stichprobengröße von $N = 3500$ unterschritten. Dies entspricht einem Rechenaufwand von $N \cdot (k + 2) = 9000$ und 52500 Simulationsdurchläufen. Zwar sind hier die Grenzwerte klein gewählt, dennoch erscheint der Rechenaufwand für das betrachtete einfache System und die moderate Parameteranzahl $k = 13$ sehr hoch.

5.3.2 Analyse des Streuverhaltens mit Bootstrap-Resampling

Wird der vorgegebene Konvergenzfehler bei einer Stichprobengröße $N_p < N$ unterschritten, so ist in einem zweiten Schritt das Streuverhalten zu beurteilen. Dies erfolgt über die Berechnung von Konfidenzintervallen mittels Bootstrap-Resampling (Abschnitt 3.3 und Anhang D). Die anhand von $B = 1000$ Bootstrap-Resamples ermittelten 95 %-Konfidenzintervalle sind in Bild 5.9 dargestellt.

Zu erkennen ist, dass mit steigender Stichprobengröße die Vertrauensbereiche entsprechend kleiner werden. Interessanterweise sind diese für die Haupteffekte bei Y_1 bis Y_3 (dargestellt sind lediglich die Ergebnisse für Y_1) deutlich größer als für die Totaleffekte. Umgekehrt verhält es sich bei der Betrachtung von Y_4 bis Y_6 (dargestellt sind die Ergebnisse stellvertretend für Y_4). Hervorgerufen wird dieser Effekt durch die Parameter, die einen signifikanten Totaleffekt aufweisen, deren Sensitivitätsmaße erster Ordnung jedoch vernachlässigbar sind.

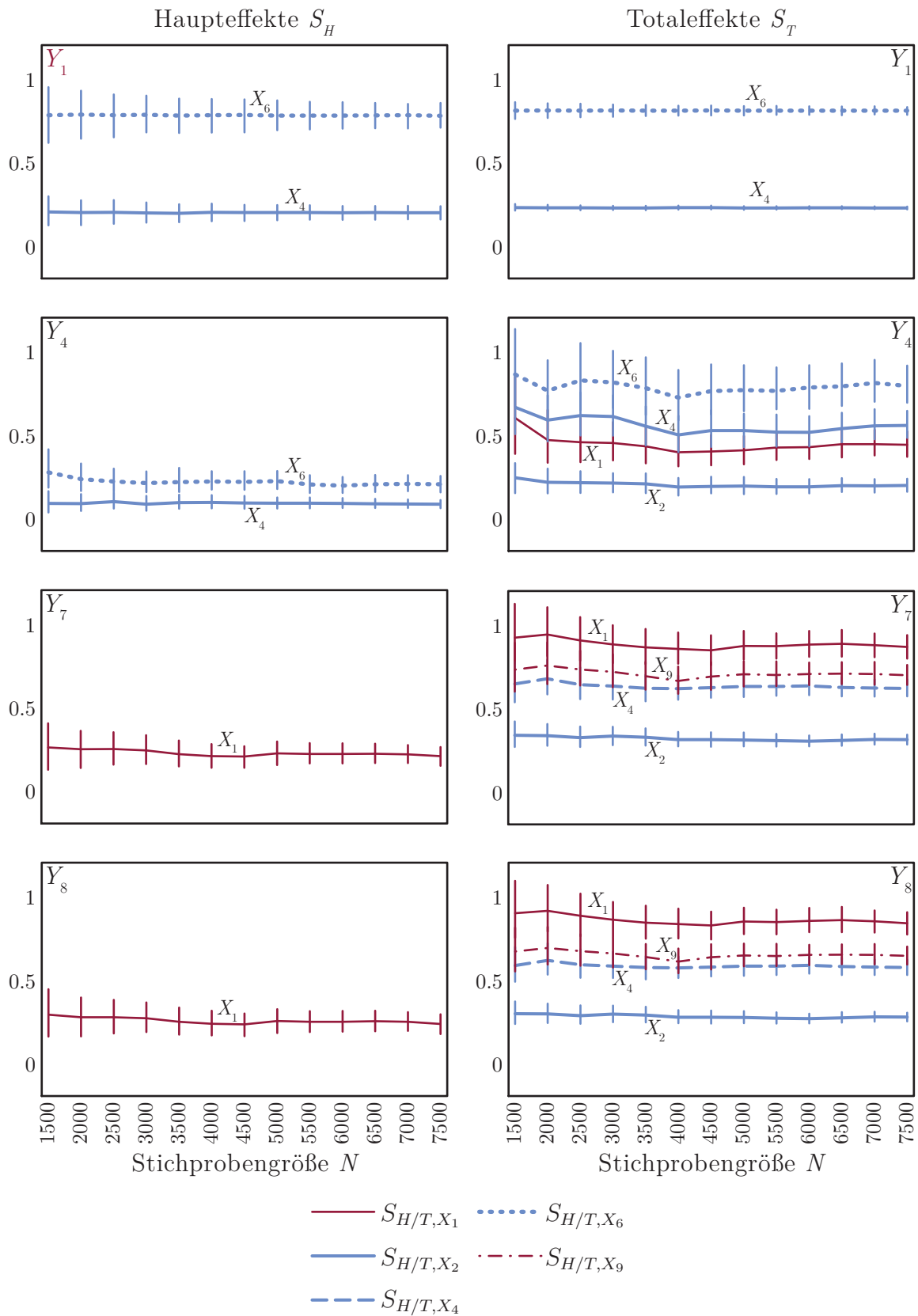


Bild 5.9: Relevante Sensitivitätsmaße mit 95 %-Konfidenzintervall

Weiterhin ist ersichtlich, dass eine Überschneidung der Konfidenzintervalle selbst bei sehr großen Stichproben nicht vollständig vermieden wird, wenn mehrere Parameter ein Sensitivitätsmaß von gleicher Größenordnung aufweisen. Gleichzeitig stellt sich eine deutliche Differenzierung zwischen den zwei größten Totaleffekten erst ab einer Stichprobengröße von $N = 5000$ ein. Ist man im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse vorrangig an der Rangfolge Einfluss nehmender Eingangsvariablen interessiert, so ist dieser Sachverhalt entsprechend zu berücksichtigen. Eine kleine Stichprobe kann aufgrund der entsprechend großen Konfidenzintervalle zu falschen Ergebnissen in der Rangfolge führen.

5.3.3 Funktionale stochastische Verschiebung

Zur Bestimmung eines quantitativen Fehlermaßes wurde das Verfahren der in dieser Arbeit entwickelten Methode der funktionalen stochastischen Verschiebung (Abschnitt 4.4) implementiert. Hierbei findet durch die Einführung von zusätzlichen Variablen und zugehörigen Funktionen ein Vergleich zwischen semianalytisch und statistisch ermittelten Sensitivitätsmaßen statt. Die grundlegenden Formeln für die semianalytische Lösung sind in Gl. (4.21) und Gl. (4.22) aufgeführt.

Es wurde als Zusatzterm $g(\tilde{\mathbf{X}})$ die Sobol'-G-Funktion (Anhang B, S. 125) mit $m = 3$ zusätzlichen Variablen $X_{k+1} \sim \mathcal{U}(0; 1)$, $X_{k+2} \sim \mathcal{U}(0; 1)$, $X_{k+3} \sim \mathcal{U}(0; 1)$ implementiert

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{X}}) &= g_1(X_{k+1}) \cdot g_2(X_{k+2}) \cdot g_3(X_{k+3}) \\ &= K_1 \frac{|4 \cdot X_{k+1} - 2| + a_1}{1 + a_1} \cdot K_2 \frac{|4 \cdot X_{k+2} - 2| + a_2}{1 + a_2} \cdot K_3 \frac{|4 \cdot X_{k+3} - 2| + a_3}{1 + a_3} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Sobol'-G-Funktion wird in vielen Veröffentlichungen mit dem Thema globale Sensitivitätsanalyse als Testbeispiel untersucht [3, 85]. Es bildet ein ideales Referenzsystem, da es sich um eine nichtstetige und nichtlineare Funktion handelt. Gleichzeitig ist die Relevanz jeder einzelnen Variable X_i über den zugehörigen Parameter a_i einstellbar. Weiterhin lassen sich die untersuchten Sensitivitätsmaße analytisch berechnen. Hier wurden die Einstellungen $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 9$ gewählt, woraus $S_{H_{k+1}} > S_{H_{k+2}} > S_{H_{k+3}}$ und $S_{T_{k+1}} > S_{T_{k+2}} > S_{T_{k+3}}$ folgt.

Somit wird angenommen, dass sich die Sobol'-G-Funktion auch für den Einsatz im Rahmen einer funktionalen stochastischen Verschiebung eignet. Die Anzahl an Parametern ist dabei problemspezifisch zu wählen. Eine Anpassung an den Wertebereich der Ausgangsgröße Y erfolgt über den Faktor K_i . Dies ist notwendig, damit die zugehörigen Sensitivitätsmaße nicht zu klein werden, da dies zu numerisch bedingten Fehlern führen kann. Hier wurden die Faktoren zu $K_1 = K_2 = K_3 = \sqrt[m]{\text{Var}[Y]}$ gesetzt, wobei die Varianz der Ausgangsgröße anhand der korrigierten Stichprobenvarianz ermittelt wurde.

		X_{k+1}	X_{k+2}	X_{k+3}
Y_8	S_H	0,6551	0,2912	0,0262
	S_T	0,6817	0,3165	0,0294

Tabelle 5.4: Semianalytisch berechnete Haupt- und Totaleffekte der zusätzlichen Variablen für Ausgangsvariable Y_8

Die einzelnen Terme zur Berechnung der Haupt- und Totaleffekte (Gln. (4.21), (4.22)) lassen sich durch die direkte Lösung der entsprechenden Integrale lösen und werden im Folgenden aufgeführt.

$$\mathbb{E}(g_{k+j}(X_{k+j})) = K_j \quad (5.9a)$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{g(\tilde{\mathbf{X}})}{g_{k+j}(X_{k+j})}\right) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K_i \quad (5.9b)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[g_{k+j}(X_{k+j})] = \frac{K_j^2}{3 \cdot (1 + a_j)^2} \quad (5.9c)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}\left[\frac{g(\tilde{\mathbf{X}})}{g_{k+j}(X_{k+j})}\right] = \left(7 + \sum_{i \neq j}^m 3a_i \cdot (2 + a_i)\right) \cdot \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m K_i^2}{9 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (1 + a_i)^2} \quad (5.9d)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[g(\tilde{\mathbf{X}})] &= \left(37 + 21a_3 \cdot (2 + a_3) + 6a_2 \cdot (7 + 3a_3 \cdot (2 + a_3)) \dots \right. \\ &\quad \left. + 3a_2^2 \cdot (7 + 3a_3 \cdot (2 + a_3)) + 6a_1 \cdot (7 + 3a_2 \cdot (2 + a_2) + 3a_3 \cdot (2 + a_3)) \dots \right. \\ &\quad \left. + 3a_1^2 \cdot (7 + 3a_2 \cdot (2 + a_2) + 3a_3 \cdot (2 + a_3))\right) \cdot \frac{\prod_{i=1}^m K_i^2}{27 \cdot \prod_{i=1}^m (1 + a_i)^2} \end{aligned} \quad (5.9e)$$

Gleichung (5.9d) und Gl. (5.9e) gelten dabei lediglich für den betrachteten Fall $m = 3$.

Die semianalytisch berechneten Sensitivitätsmaße der zusätzlichen Variablen X_{k+1} , X_{k+2} , X_{k+3} sind in Tabelle 5.4 aufgeführt. Ein Vergleich mit den stochastisch ermittelten Werten in Abhängigkeit von der Stichprobengröße und die Auswertung der absoluten und relativen Fehler sind in Bild 5.10 dargestellt.

Auffällig ist, dass Haupt- und Totaleffekte auch bei kleinen Stichproben gut approximiert werden. Ab einer Stichprobengröße von etwa $N = 3500$ verschwinden sowohl die relativen als auch absoluten Fehler. Dies deckt sich zwar mit den Untersuchungen zur stochastischen Konvergenz, dennoch erscheint hier ein Rückschluss auf die Fehler der Systemvariablen X_1 bis X_{13} tendenziell als zu optimistisch. Es wird davon ausgegangen, dass die Wechselwirkungsbeziehungen des Systems nicht adäquat von den Termen der funktionalen Verschiebung abgebildet werden. Dies wird auch durch die geringen Differenzen zwischen den Total- und Haupteffekten der zusätzlichen Parameter belegt.

In den hier dargestellten Untersuchungen wurde die Sobol'-G-Funktion aufgrund ihrer Eigenschaften und weiten Verbreitung als Referenzsystem implementiert. Im Rahmen

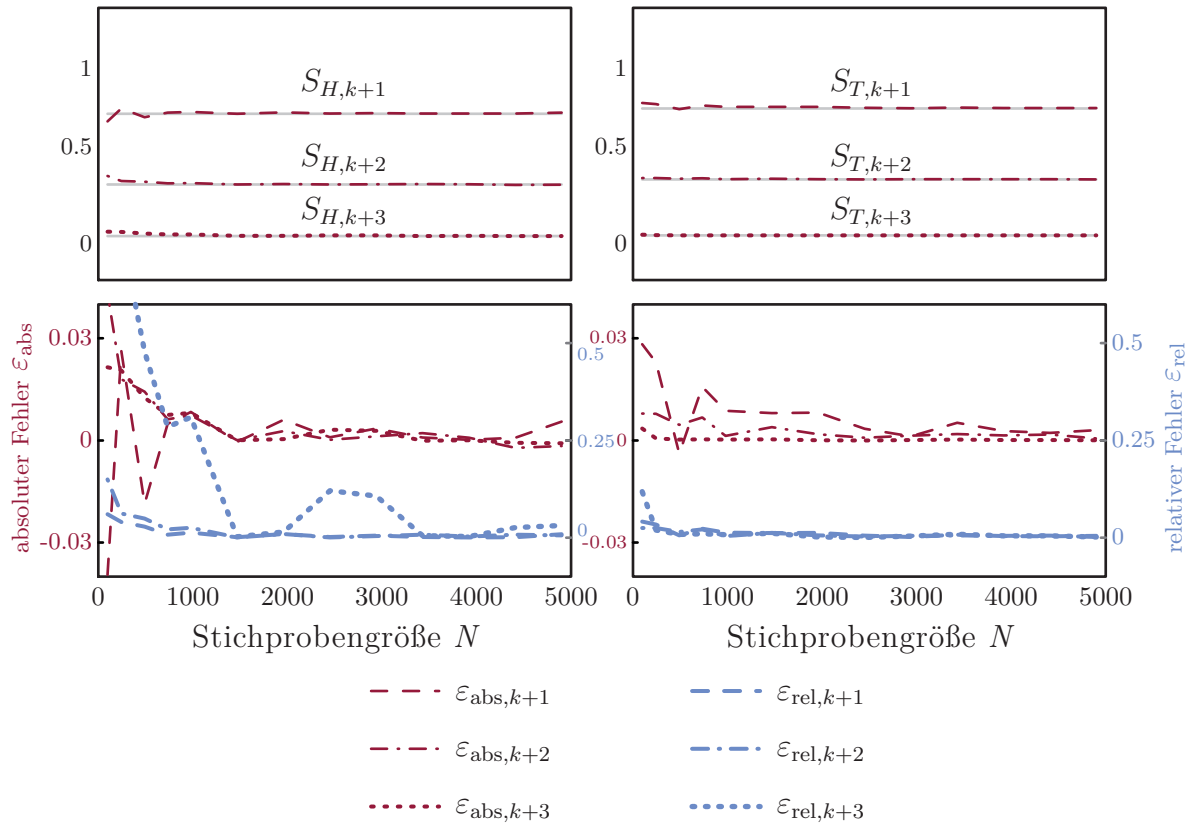


Bild 5.10: Statistisch geschätzte Sensitivitätsmaße, absolute und relative Fehler

dieser Arbeit wird trotz der nicht zufrieden stellenden Ergebnisse auf die Analyse und Implementierung alternativer Funktionen verzichtet. Dies wird Bestandteil von Folgeuntersuchungen sein.

5.4 Konventionelle Verfahren der Sensitivitätsanalyse

Als eines der wenigen alternativen globalen Verfahren mit äquivalenten Zielsetzungen ist vor allem die lineare Regression verbreitet. Die ebenfalls oft verwendete gradientenbasierte Sensitivitätsanalyse bleibt dabei unberücksichtigt, da es sich hierbei um eine rein lokale Methode handelt [85]. Bei der linearen Regression wird eine Funktion der Art

$$Y = b_0 + b_1 f(X_1) + b_2 f(X_2) + \dots + b_{ij} f(X_i, X_j) + \dots + b_{12\dots k} f(X_1, X_2, \dots, X_k) + \varepsilon \quad (5.10)$$

gesucht, sodass der Fehler ε minimal wird. Dies erfolgt beispielsweise über die Anpassung der Koeffizienten b_i , sodass die Quadratsumme der Residuen (Methode der kleinsten Quadrate) minimiert wird. Setzt man als Funktionen $f(X_i) = X_i$ die Variablen bis zur ersten Ordnung ein, so erhält man die sogenannte einfache lineare Regressionsgerade. Eine Normierung der Koeffizienten erfolgt über die Multiplikation mit den Verhältnissen

der Standardabweichungen $\beta_i = \frac{\sigma_{X_i}}{\sigma_Y} \cdot b_i$. Die Koeffizienten β_i werden entsprechend als standardisierte Regressionskoeffizienten (SRK) bezeichnet. Es ergibt sich die Darstellung

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k \quad . \quad (5.11)$$

Die normierten Größen β_i werden oft als Sensitivitätsmaß eingesetzt, da sie ein direktes Maß für den linearen Zusammenhang zwischen der Ausgangsgröße Y und der Variablen X_i (äquivalent zum Korrelationskoeffizienten) darstellen und immer $\beta_i < 1$ gilt.

Auf die Erläuterung der mathematischen Grundlagen zur Regressionsanalyse soll hier verzichtet werden, da diese in Standardwerken (beispielsweise [81]) detailliert besprochen werden. Von Interesse ist in dem Zusammenhang, dass auch in dieser einfachen Form eine mathematisch eindeutige Interpretation der standardisierten Regressionskoeffizienten nicht möglich ist [11].

In Bild 5.11 werden die Haupt- und Totaleffekte der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse den Beträgen der standardisierten Regressionskoeffizienten, die anhand der Regressionsgleichung (Gl. (5.11)) ermittelt worden sind, gegenübergestellt. Zwischen Haupteffekten und den Regressionskoeffizienten ist eine qualitativ sehr gute Übereinstimmung der relevanten Parameter zu erkennen. Dies ist nicht verwunderlich, da sowohl die Haupteffekte als auch die standardisierten Regressionskoeffizienten in dieser Form ein Sensitivitätsmaß erster Ordnung (d. h. Berücksichtigung des direkten Einflusses der Eingangsvariablen ohne Mischterme) darstellen. Vergleicht man hingegen Totaleffekte mit den Ergebnissen der einfachen Regressionsanalyse, so treten insbesondere bei den Ausgangsgrößen Y_4, Y_5, Y_7 und Y_8 deutliche Unterschiede auf. Der Einfluss der vierten Eingangsvariable X_4 (Geschwindigkeit) scheint insbesondere in Wechselwirkung mit anderen Parametern aufzutreten. Dies wird weder von den Haupteffekten noch von der einfachen Regressionsanalyse erfasst.

Eine Verbesserung der konventionellen Methoden besteht in der Erweiterung der einfachen Regressionsanalyse Gl. (5.11) mit Termen zweiter Ordnung

$$Y = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \beta_{1,2} X_1 X_2 + \beta_{1,3} X_1 X_3 + \dots + \beta_{k-1,k} X_{k-1} X_k \quad . \quad (5.12)$$

Ein skalares Sensitivitätsmaß einer Variable lässt sich beispielsweise über die Summe der Absolutbeträge aller zugehörigen Koeffizienten berechnen

$$\beta_{i,Total} = \beta_i + \sum_{j=1}^k \beta_{i,j} \quad . \quad (5.13)$$

Eine mathematische quantitative Interpretation dieser Maße ist nun nicht mehr möglich, dennoch zeigt sich (Bild 5.12), dass qualitativ alle Parameter als einflussreich identifiziert werden, die auch über den Totaleffekt der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse als

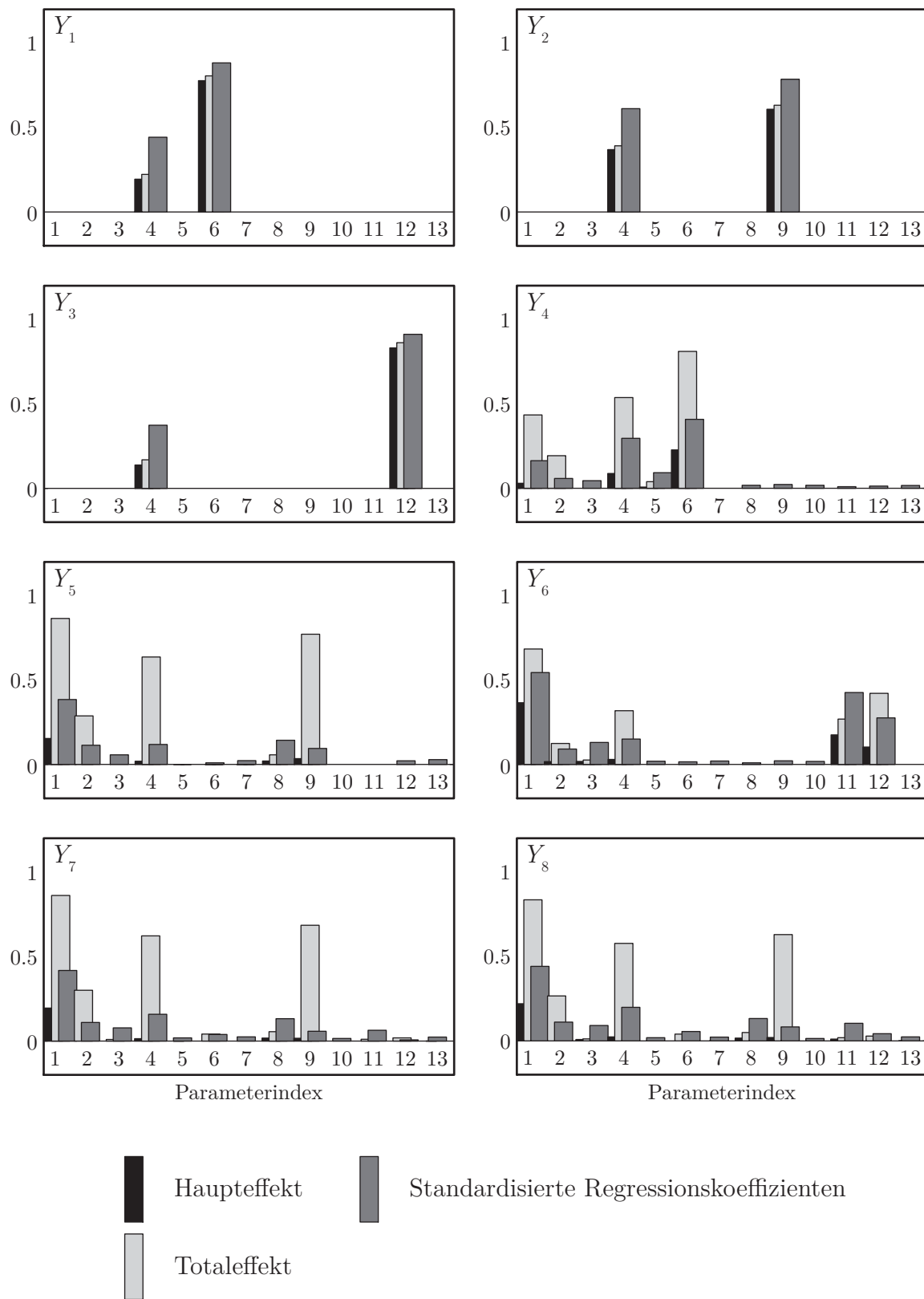


Bild 5.11: Haupt- und Totaleffekte, standardisierte Regressionskoeffizienten

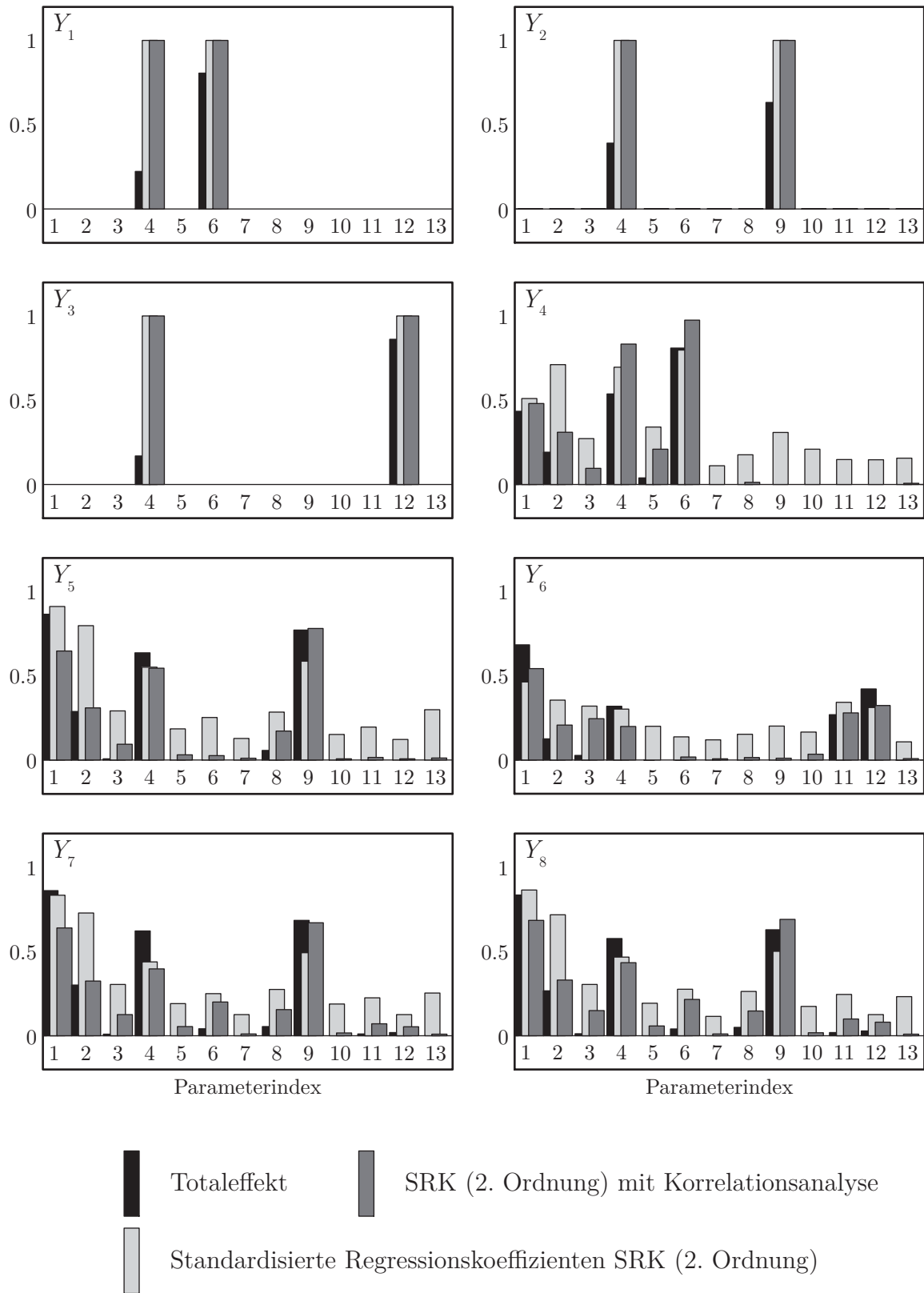


Bild 5.12: Totaleffekte und Koeffizienten einer Regressionsanalyse 2. Ordnung

dominant bewertet wurden. Allerdings wird die Bedeutung offensichtlich irrelevanter Parameter überschätzt (z. B. tauchen Eingangsparameter X_8 bis X_{13} in der analytischen Formulierung von Y_4 (Gl. (5.7)) nicht auf). Es werden somit Typ-I-Fehler begangen. Eine Vermeidung dieser Typ-I-Fehler konnte erreicht werden, indem vor der Durchführung der eigentlichen Regressionsanalyse die Korrelationskoeffizienten zwischen betrachteter Ausgangsgröße Y und allen Variablen $X_1, X_2, \dots, X_k, X_1 \cdot X_2, \dots, X_{k-1} \cdot X_k, X_1 \cdot X_1, \dots, X_k \cdot X_k$ des Polynoms zweiter Ordnung berechnet wurden. Über einen Signifikanztest wurden somit zuerst potentielle Terme für das Regressionspolynom identifiziert.

Damit die Koeffizienten β_i eindeutig berechnet werden können, muss die Matrix, die aus den Stichprobenwerten der Variablen gebildet wird, regulär sein. Dies wird in einem zweiten Schritt überprüft. Über einen einfachen Algorithmus, der die Regularität der Stichprobenmatrix bei sukzessiver Zunahme berücksichtigter Variablen überprüft, können diejenigen Parameter, die sich aus der Linearkombination anderer Variablen berechnen lassen und somit den Rang der Matrix reduzieren, identifiziert werden.

In der folgenden linearen Regressionsanalyse werden die über die Korrelations- und Regularitätsuntersuchung als insignifikant eingestuften Variablen nicht mehr berücksichtigt. Ein skalareres Sensitivitätsmaß wird analog zu Gl. (5.13) berechnet.

Es zeigt sich (Bild 5.12), dass anhand dieser Vorgehensweise Fehler vom Typ I vermieden werden und dass auch mittels konventioneller Verfahren relevante Wechselwirkungseffekte zumindest qualitativ identifiziert werden können. Allerdings verschlechterten sich die Ergebnisse wiederum bei der Berücksichtigung von Termen dritter und höherer Ordnung. Die Gründe hierfür sind unbekannt. Die fehlende Möglichkeit zur quantitativen Interpretation und Bewertung der Maße stellt den wesentlichen Nachteil der konventionellen Verfahren der Sensitivitätsanalyse dar.

5.5 Zwischenergebnisse

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse der Untersuchungen am System des Ein-Masse-Schwingers zusammengefasst werden. In einem ersten Schritt wurden verschiedene Algorithmen zur Berechnung der Haupt- und Totaleffekte implementiert. Der Einsatz statistischer Schätzverfahren, vorgestellt in Abschnitt 5.2.1, ist den spektralen Methoden (Abschnitt 5.2.2) (ExFAST und RBD) bei der Analyse von Totaleffekten vorzuziehen. Schon bei dem betrachteten einfachen Struktursystem kommt es bei letztgenannten Algorithmen zu Typ-I-Fehlern, d. h. irrelevante Parameter werden als relevant eingestuft. Einen weiteren Nachteil der spektralen Untersuchungen stellt die fehlende Möglichkeit einer stochastischen Fehleranalyse dar. Ein wesentlicher Vorteil besteht allerdings in der höheren Recheneffizienz bei der Berechnung von Haupteffekten. Insbesondere der RBD-Algorithmus zeichnet sich dabei durch eine relativ geringe Anzahl an benötigten

Simulationsdurchläufen aus. Allerdings lohnt sich der Einsatz varianzbasierter Sensitivitätsanalysen insbesondere zur Identifizierung von Wechselwirkungseffekten. Diese werden lediglich über den Totaleffekt wiedergegeben.

Ein zweites wichtiges Ergebnis dieses Kapitels stellt die detaillierte Untersuchung der Schätzfehler (Abschnitt 5.3) dar. Es wurde eine Methodik zur Bewertung der stochastischen Konvergenz vorgestellt (Abschnitt 4.3). Dabei wurde aufgezeigt, dass die Wahl der Schätzmethode nach Jansen und die Verwendung von Quasizufallszahlen (in dieser Arbeit wurden Sobol'-Sequenzen implementiert) zu einer schnelleren Konvergenz der statistischen Schätzungen führen. Ist dieser Sachverhalt gegeben, kann das Streuverhalten beurteilt werden. Hierbei wurde das in der Literatur etablierte Verfahren des Bootstrap-Resamplings verwendet (Abschnitt 5.3.2). Eine weiterführende Fehlerbeurteilung wird mit der funktionalen Verschiebung ermöglicht (Abschnitt 5.3.3). Allerdings stellte sich heraus, dass die hier eingesetzte Sobol'-G-Funktion als Erweiterung zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Fehler führt und somit in der implementierten Form nicht geeignet ist.

Abschließend wurde ein Vergleich mit konventionellen Verfahren (Abschnitt 5.4) durchgeführt. Die Anwendung der weit verbreiteten einfachen linearen Regression eignet sich nicht, Wechselwirkungseffekte zwischen den Eingangsparametern adäquat zu identifizieren. Führt man jedoch eine Korrelationsanalyse durch und schließt eine lineare Regression mit Termen zweiter Ordnung an, so lassen sich durchaus auch komplexe nichtlineare Zusammenhänge identifizieren. Nachteilig dabei ist die fehlende quantitative Information, die im Gegensatz dazu von den varianzbasierten Sensitivitätsmaßen bereitgestellt wird.

6 Sensitivitätsanalyse eines adaptronischen Kragbalkens

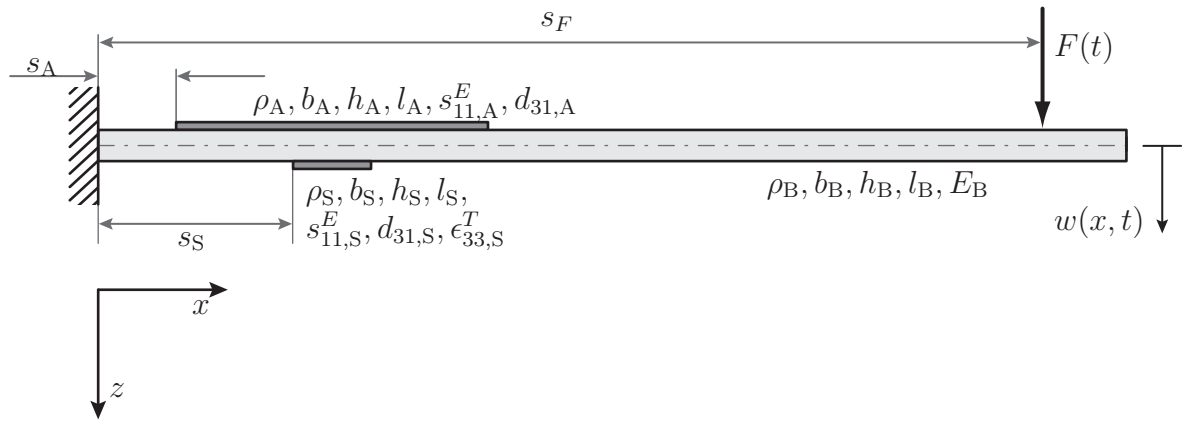


Bild 6.1: Kragbalken mit piezoelektrischem Patchaktor und -sensor

Das Ziel dieses Kapitels stellt die Implementierung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse eines adaptronischen Systems dar. Dabei werden die Ergebnisse des vorherigen Kapitels bezüglich der Auswahl der Stichprobenerstellung, des Berechnungsverfahrens und der Methoden der Fehlerabschätzung berücksichtigt. Es wird ein einfacher Euler-Bernoulli-Kragbalken mit einem kollozierten flächigen Piezoaktor und -sensorpaar (Bild 6.1) betrachtet.¹ Es wirkt eine Störkraft $F(t)$ in der Nähe des freien Balkenendes. Die zur analytischen eindimensionalen Beschreibung des Systems benötigten 21 Strukturvariablen, hierzu zählen sowohl Geometrie- als auch Materialparameter, und die zugehörigen Nennwerte sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Als Regelungsstrategie wird ein Positive-Position-Feedback (PPF)-Algorithmus (Abschnitt 6.1.2) implementiert. Dies führt in der hier betrachteten Form zu neun zusätzlichen Systemvariablen.

In einem ersten Schritt wird eine vollständige varianzbasierte Sensitivitätsanalyse anhand eines analytischen Modells durchgeführt. Dabei werden die aus Kapitel 5 gewonnenen Erkenntnisse umgesetzt. Anhand dieser Untersuchungen wird wiederum die Eignung eines Morris-Screening-Tests und eines Metamodells, basierend auf neuronalen Netzwerken, analysiert. Beide Verfahren sollen zu einer Verkürzung der Rechenzeit führen. Der Morris-Screening-Test dient dabei der Identifizierung n_{MS} irrelevanter Parameter

¹In diesem Kapitel werden die Parameter des Aktors mit dem Index A, die des Sensors mit dem Index S und die des Balkens mit dem Index B gekennzeichnet.

Parameter	Benennung	Referenzwert	Dichtefunktion
$X_1 \hat{=} l_B$	Balkenlänge	0,2 m	$\mathcal{N}(0,2; (0,003)^2)$
$X_2 \hat{=} s_A$	Aktorposition	0,01 m	$\mathcal{U}(0,007; 0,013)$
$X_3 \hat{=} l_A$	Aktorlänge	0,05 m	$\mathcal{U}(0,0497; 0,0503)$
$X_4 \hat{=} s_S$	Sensorposition	0,03 m	$\mathcal{U}(0,027; 0,033)$
$X_5 \hat{=} l_S$	Sensorlänge	0,01 m	$\mathcal{U}(0,00985; 0,01015)$
$X_6 \hat{=} s_F$	Ort der Kraftanregung F	0,196 m	$\mathcal{U}(0,85; 1) \cdot l_B$
$X_7 \hat{=} \rho_B$	Dichte Balken	$2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\mathcal{U}(2640; 2850)$
$X_8 \hat{=} h_B$	Balkenhöhe	0,003 m	$\mathcal{U}(0,0025; 0,0035)$
$X_9 \hat{=} b_B$	Balkenbreite	0,04 m	$\mathcal{U}(0,02975; 0,03025)$
$X_{10} \hat{=} E_B$	E-Modul Balken	$7 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	$\mathcal{U}(6 \cdot 10^{10}; 8 \cdot 10^{10})$
$X_{11} \hat{=} \rho_A$	Dichte Aktor	$7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\mathcal{N}(7800; (20)^2)$
$X_{12} \hat{=} h_A$	Aktorhöhe	0,001 m	$\mathcal{U}(0,00095; 0,00105)$
$X_{13} \hat{=} b_A$	Aktorbreite	0,03 m	$\mathcal{U}(0,02975; 0,03025)$
$X_{14} \hat{=} s_{11,A}^E$	Nachgiebigkeit Aktor	$1,5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$	$\mathcal{N}(1,5 \cdot 10^{-11}; (0,5 \cdot 10^{-12})^2)$
$X_{15} \hat{=} d_{31,A}$	Ladungskonstante Aktor	$-2,1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{V}}$	$\mathcal{N}(-2,1 \cdot 10^{-10}; (1,05 \cdot 10^{-11})^2)$
$X_{16} \hat{=} \rho_S$	Dichte Sensor	$7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\mathcal{N}(7800; (20)^2)$
$X_{17} \hat{=} h_S$	Sensorhöhe	0,001 m	$\mathcal{U}(0,00095; 0,00105)$
$X_{18} \hat{=} b_S$	Sensorbreite	0,01 m	$\mathcal{U}(0,00985; 0,01015)$
$X_{19} \hat{=} s_{11,S}^E$	Nachgiebigkeit Sensor	$1,5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$	$\mathcal{N}(1,5 \cdot 10^{-11}; (0,5 \cdot 10^{-12})^2)$
$X_{20} \hat{=} d_{31,S}$	Ladungskonstante Sensor	$-2,1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{V}}$	$\mathcal{N}(-2,1 \cdot 10^{-10}; (1,05 \cdot 10^{-11})^2)$
$X_{21} \hat{=} \epsilon_{33,S}^T$	relative Permittivitätszahl	2400	$\mathcal{N}(2400; (120)^2)$

Tabelle 6.1: Struktur- und Materialparameter des Piezobalkens

vor der Durchführung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse. Damit sinkt die benötigte Anzahl an Simulationsdurchläufen für eine gegebene Stichprobengröße N um $N \cdot (k + 2) - N \cdot (k + 2 - n_{\text{MS}}) = N \cdot n_{\text{MS}}$. Als zweite Maßnahme werden neuronale Netze zur Metamodellierung des Systems eingesetzt. Es wird anhand einer relativ geringen Anzahl an Simulationsdurchläufen ein vereinfachtes Metamodell abgeleitet. Diese vereinfachte mathematische Beschreibung des Balkensystems ersetzt in der anschließenden Durchführung der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse das aufwendig zu berechnende Originalmodell.

Die adäquaten Einstellungen für den Morris-Screening-Test und die neuronalen Netze mit möglichst hoher Approximationsgüte werden anhand des analytischen Modells des adaptronischen Balkens identifiziert. Durch die zuvor vorgenommene vollständige statistische Analyse sind entsprechende Referenzwerte verfügbar. Die erzielten Ergebnisse dienen der Implementierung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse anhand eines zweiten Modells des Systems. Dabei wird die Strukturmodellierung mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) durchgeführt.

Im Allgemeinen können mit der Finite-Elemente-Methode komplexe Strukturgeometrien modelliert werden. Dies führt in der Regel zu einer großen Anzahl an Freiheits-

graden. Zur Implementierung der Regelstrategie im Gesamtmodell des adaptronischen Systems wird eine Modellreduktion benötigt. In dieser Arbeit wird hierfür eine Methode basierend auf der Bestimmung einer orthogonalen Basis von Krylov-Unterräumen verwendet. Da die Berechnung von Finite-Elemente-Modellen rechenintensiv und die Anzahl an benötigten Rechendurchläufen einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse sehr hoch ist, wird hier direkt sowohl der Morris-Screening-Test als auch eine Metamodellierung mit neuronalen Netzen durchgeführt. Dabei werden die anhand des analytischen Modells identifizierten adäquaten Einstellungen übernommen.

6.1 Analytische Modellbildung

6.1.1 Strukturmodellierung

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen eines Euler-Bernoulli-Balken mit applizierten piezokeramischen Aktoren und Sensoren bei unterschiedlichen Randbedingungen ist in der Literatur vielfach beschrieben worden. Daher werden hier lediglich die wesentlichen Schritte erläutert. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an den Arbeiten von Hong [47] und Park [73].

Zur Beschreibung der Wirkweise des piezoelektrischen Aktors und Sensors wird die Kopplung zwischen der elektrischen Verschiebung \mathbf{D} , dem elektrischen Feld \mathbf{E} und der mechanischen Dehnung \mathbf{S} und Spannung \mathbf{T} über lineare konstitutive Gleichungen in Tensornotation beschrieben

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad , \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{T} + \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad . \quad (6.1b)$$

Im betrachteten Beispiel des Balkensystems wird die Wirkweise des Aktors und Sensors über den d_{31} -Effekt beschrieben. Es wird lediglich in Polarisationsrichtung (gekennzeichnet mit dem Index 3) ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = [0 \ 0 \ E_3]^T$ induziert, und die mechanischen Auswirkungen werden in x -Richtung (S_{11}, T_{11}) betrachtet. Somit reduzieren sich die konstitutiven Gleichungen auf jeweils eine Zeile

$$S_{11} = s_{11}^E T_{11} + d_{31} E_3 \quad , \quad (6.2a)$$

$$D_3 = d_{31} T_{11} + \epsilon_{33,S}^T E_3 \quad . \quad (6.2b)$$

Die Koeffizienten Nachgiebigkeit s_{11}^E , Ladungskonstante d_{31} und Permittivität $\epsilon_{33,S}^T$ stellen dabei Parameter des piezokeramischen Materials dar.

Die kinetische Energie des Gesamtsystems ist gegeben durch den Ausdruck $T = T_B + T_A + T_S$, wobei die Energieausdrücke der einzelnen Strukturbestandteile (T_B kinetische

Energie des Balkens, T_A kinetische Energie des Piezoaktors, T_S kinetische Energie des Piezosensors) aufsummiert werden. Im Einzelnen berechnen sich die Terme wie folgt

$$T_B = \frac{1}{2} \int_0^{l_B} \rho_B A_B \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad , \quad (6.3a)$$

$$T_A = \frac{1}{2} \int_0^{l_B} \rho_A A_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cdot [H(x - s_A) - H(x - s_A - l_A)] dx \quad , \quad (6.3b)$$

$$T_S = \frac{1}{2} \int_0^{l_B} \rho_S A_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cdot [H(x - s_S) - H(x - s_S - l_S)] dx \quad . \quad (6.3c)$$

Die Integranden setzen sich aus der Multiplikation der jeweiligen Materialdichte ρ , der Stirnfläche $A = b \cdot h$ und der zweiten Ableitung der Auslenkung $w(x, t)$ nach der Zeit t zusammen. Für den Aktor und Sensor kommt ein weiterer Term zur Darstellung der Ausblendfunktion hinzu. Hier wird die Schreibweise mit der Heaviside-Funktion $H(x)$ verwendet.²

Die potenzielle Energie des Gesamtsystems kann ebenfalls über die Summe der entsprechenden Anteile der einzelnen Strukturelemente dargestellt werden ($U = U_B + U_A + U_S$). Die Terme berechnen sich dabei zu

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^{l_B} E_B I_B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad , \quad (6.4a)$$

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{S}_A \cdot \mathbf{T}_A + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_B} [H(x - s_A) - H(x - s_A - l_A)] \cdot \left[E_A I_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots \right. \\ &\quad \left. + A_A E_3 \left(-\frac{1}{2} (h_A + h_B) d_{31,A} E_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\epsilon_{33,A} - d_{31}^2 E_A) E_3 \right) \right] dx \quad , \quad (6.4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_S &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{S}_S \cdot \mathbf{T}_S dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_B} E_S I_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \cdot [H(x - s_S) - H(x - s_S - l_S)] dx \quad . \quad (6.4c) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der potenziellen Energie eines Strukturelements wird das Produkt aus mechanischer Dehnung \mathbf{S} und Spannung \mathbf{T} über das Volumen integriert. Beim aktorischen Einsatz einer Piezokeramik kommt das Produkt aus elektrischem Feld \mathbf{E} und elektrischer Verschiebung \mathbf{D} hinzu. Innerhalb der eindimensionalen Beschreibung des

²Alternativ kann auch das Föppl-Symbol eingesetzt werden.

Balkensystems reduzieren sich die Terme auf ein entsprechendes eindimensionales Integral. Aus dem Produkt der mechanischen Dehnung und Spannung resultiert das Produkt aus E-Modul E , dem axialen Flächenträgheitsmoment $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ und der zweiten Ableitung der Auslenkung w nach dem Weg x .

Entsprechend kann durch den Einsatz der konstitutiven Gleichungen (Gl. (6.2)) die potenzielle Energie des Piezoaktors U_A in der dargestellten Form beschrieben werden. $E_3 = \frac{V_A(t)}{h_A}$ bezeichnet das in Polarisationsrichtung des Piezoaktors wirkende elektrische Feld mit der angelegten elektrischen Spannung $V_A(t)$, D_3 die elektrische Verschiebung in Polarisationsrichtung und ϵ_{33} die Dielektrizitätskonstante.

Mit der Vernachlässigung von Dämpfung ergibt sich die virtuelle Arbeit bedingt durch die Anregungskraft $F(t)$ zu

$$\delta W = \int_0^{l_B} F(t) \delta(x - s_F) \delta w \, dx \quad . \quad (6.5)$$

Der Term $\delta(x - s_F)$ kennzeichnet hierbei die Dirac-delta-Funktion. Dieser ist nicht zu verwechseln mit dem gleichlautenden Variationsoperanden δ . Die Bewegungsgleichungen lassen sich mit der Anwendung des Hamiltonschen Prinzips

$$\delta H = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) \, dt = 0 \quad (6.6)$$

über die Vertauschung von Integralen sowie mittels partieller Integration [35] herleiten

$$\begin{aligned} & \rho_B A_B \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_B I_B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \dots \\ & + \left(\rho_A A_A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_A I_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \cdot \underbrace{[H(x - s_A) - H(x - s_A - l_A)]}_{=H_A} \dots \\ & + \left(\rho_S A_S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_S I_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \cdot \underbrace{[H(x - s_S) - H(x - s_S - l_S)]}_{=H_S} \\ & = F(t) \delta(x - s_F) \dots \\ & - \frac{1}{2} b_A d_{31,A} E_A V_A(t) (h_B + h_A) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} [H(x - s_A) - H(x - s_A - l_A)] \right) \quad . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die Modellierung eines piezokeramischen Patchsensors ist beispielsweise in [77] beschrieben. Der Sensor wird elektrisch kurzgeschlossen, sodass $E_3 = 0$ gilt. Die elektrische Ladung Q berechnet sich mittels Integration der elektrischen Verschiebung D_3 über die Elektrodenfläche $Q = \int_{s_S}^{s_S+l_S} D_3 b_S \, dx$. Mit den konstitutiven Gleichungen (Gl. (6.2)) lässt

sich damit unter Annahme eines angeschlossenen Ladungsverstärkers die Ausgangsspannung $V_S(t)$ berechnen

$$V_S(t) = -\frac{Q}{C_f} = \frac{(s_{11,S}^E)^{-1} d_{31,S} (h_B + h_S) b_S}{2C_f} \cdot (w'(x = s_S + l_S, t) - w'(x = s_S, t)). \quad (6.8)$$

Den dargestellten Untersuchungen wird dabei für die Rückkoppelkapazität C_f des Ladungsverstärkers ein Wert von $1 \cdot 10^{-9}$ F zugrunde gelegt.

Zur Diskretisierung wird ein Ritz-Ansatz

$$w(x, t) = \sum_i^N W_i(x) q_i(t) \quad (6.9)$$

durchgeführt, wobei die Ansatzfunktionen $W_i(x)$ die gegebenen geometrischen Randbedingungen erfüllen müssen. Es bietet sich an, als Ansatzfunktionen die Eigenformen des einfachen Kragbalkens

$$W_i(x) = \sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x) - \frac{\sinh(\beta_i l_B) + \sin(\beta_i l_B)}{\cosh(\beta_i l_B) + \cos(\beta_i l_B)} (\cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x)) \quad (6.10)$$

zu wählen. Die Werte für das Produkt $\beta_i l_B$ ergeben sich aus den Nulldurchgängen der charakteristischen Gleichungen und betragen für die ersten drei Eigenformen $\beta_1 l_B = 1,8751$; $\beta_2 l_B = 4,6941$; $\beta_3 l_B = 7,8548$. Aufgrund der Orthogonalität der Eigenvektoren ergeben sich somit durch die Diskretisierung N entkoppelte Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} & \left(\rho_B A_B \int_0^{l_B} W_i^2(x) dx + \rho_A A_A \int_0^{l_B} W_i^2(x) H_A dx + \rho_S A_S \int_0^{l_B} W_i^2(x) H_S dx \right) \cdot \ddot{q}_i(t) \dots \\ & + \left(E_B I_B \int_0^{l_B} W_i''^2(x) dx + E_A I_A \int_0^{l_B} W_i''^2(x) H_A dx + E_S I_S \int_0^{l_B} W_i''^2(x) H_S dx \right) \cdot q_i(t) \\ & = \int_0^{l_B} W_i(x) F(t) \delta(x - s_F) dx - \frac{1}{2} b_A d_{31,A} E_A V_A(t) (h_B + h_A) \int_0^{l_B} W_i(x) H_A'' dx \quad . \end{aligned} \quad (6.11)$$

In dieser Arbeit werden lediglich die ersten drei Biegeeigenformen $N = 3$ mit den zugehörigen Modalkoordinaten q_1, q_2, q_3 betrachtet.

6.1.2 Positive-Position-Feedback-Regelung

Das Konzept der Positive-Position-Feedback-Regelungsstrategie wurde erstmals von Goh [33] vorgestellt. Sie eignet sich zur aktiven Dämpfung mit kollokierten Piezoaktoren und

Parameter	Benennung	Referenzwert	Dichtefunktion
$X_{22} \hat{=} g_{f,1}$	Verstärkung Filter 1	0,1	$\mathcal{U}(0,05; 0,15)$
$X_{23} \hat{=} \xi_{f,1}$	Dämpfung Filter 1	0,7	$\mathcal{U}(0,6; 0,8)$
$X_{24} \hat{=} \omega_{f,1}$	Kreisfrequenz Filter 1	$978 \cdot 2\pi$	$\mathcal{U}(978 \cdot 2\pi; 1078 \cdot 2\pi)$
$X_{25} \hat{=} g_{f,2}$	Verstärkung Filter 2	0,4	$\mathcal{U}(0,35; 0,45)$
$X_{26} \hat{=} \xi_{f,2}$	Dämpfung Filter 2	0,7	$\mathcal{U}(0,6; 0,8)$
$X_{27} \hat{=} \omega_{f,2}$	Kreisfrequenz Filter 2	$374 \cdot 2\pi$	$\mathcal{U}(374 \cdot 2\pi; 474 \cdot 2\pi)$
$X_{28} \hat{=} g_{f,3}$	Verstärkung Filter 3	0,9	$\mathcal{U}(0,85; 0,95)$
$X_{29} \hat{=} \xi_{f,3}$	Dämpfung Filter 3	0,7	$\mathcal{U}(0,6; 0,8)$
$X_{30} \hat{=} \omega_{f,3}$	Kreisfrequenz Filter 3	$62 \cdot 2\pi$	$\mathcal{U}(62 \cdot 2\pi; 162 \cdot 2\pi)$

Tabelle 6.2: Parameter der PPF-Regelungsstrategie

-sensoren bei der Verwendung des d_{31} -Effekts [78]. Dies konnte auch im Rahmen eigener Vorarbeiten [36] anhand eines aktiven Ölwannensystems in der Simulation und im Experiment gezeigt werden.

Das verzerrungsproportionale Sensorsignal wird dabei mit positivem Vorzeichen über ein Filter zweiter Ordnung auf den Piezoplattenaktor zurückgeführt. Für das PPF-Filter mit dem virtuellen Filterzustand z_i ergibt sich somit die Differentialgleichung

$$\ddot{z}_i + 2\xi_{f,i}\omega_{f,i}\dot{z}_i + \omega_{f,i}^2 z_i = \omega_{f,i}^2 K V_S(t) \quad . \quad (6.12)$$

Das Regelgesetz für die Aktorspannung lautet

$$V_A(t) = \sum_i^{n_f} g_{f,i} \omega_{f,i}^2 z_i \quad . \quad (6.13)$$

Für den adaptronischen Kragbalken wird für jede der drei betrachteten Eigenfrequenzen ein einzelnes Filter implementiert. Somit ergeben sich mit den Verstärkungen $g_{f,i}$, den Filterkreisfrequenzen $\omega_{f,i}$ und Filterdämpfungen $\xi_{f,i}$ neun zusätzliche Parameter (Tabelle 6.2). Als Verstärkungsfaktor des Ausgangssignals wird $K = 100$ gewählt. Dies entspricht in der Simulation einer maximalen Aktorspannung von ca. 1000 Volt.

6.1.3 Bewegungsgleichungen und Ausgangsgrößen

Die Bewegungsgleichungen des aktiven Struktursystems lassen sich demnach mit sechs gekoppelten Differentialgleichungen beschreiben. Mit den Umbenennungen $z_1 = q_4, z_2 = q_5, z_3 = q_6$ und dem Koordinatenvektor $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$ lauten diese in Matrix-Vektor Notation

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot F(t) \quad . \quad (6.14)$$

In Bild 6.2 ist die Übertragungsfunktion zwischen der Kraftanregung und der Beschleunigung des Balkenendes sowohl für das aktive als auch passive ($g_{f,i} = 0 \ \forall \ i$)

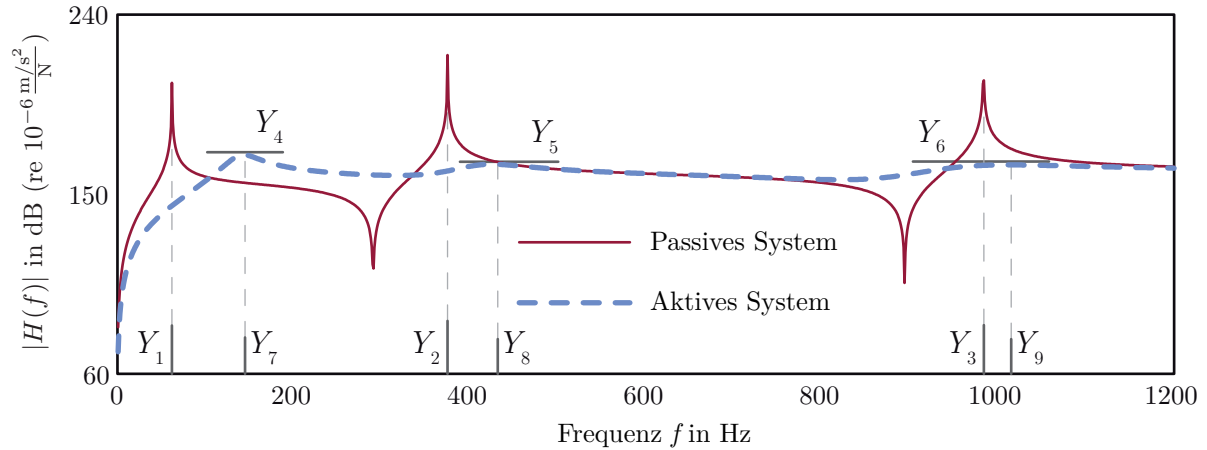


Bild 6.2: Übertragungsfunktion Kraftanregung - Beschleunigung am Balkenende

System dargestellt. Es wurden dabei die Referenzwerte der Parameter (Tabellen 6.1 und 6.2) in die Simulation implementiert. Als die zu bewertenden Ausgangsgrößen der Sensitivitätsanalyse werden die Eigenfrequenzen des passiven Systems Y_1 bis Y_3 und die Resonanzamplituden und -frequenzen des aktiven Systems Y_4 bis Y_9 betrachtet (Bild 6.2).

Zur Durchführung der Simulationen wurde die Bewegungsgleichung Gl. (6.14) in die Zustandsraumdarstellung, in diesem Fall in ein System von 12 Differentialgleichungen erster Ordnung überführt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{Zrd} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}_{Zrd} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad (6.15)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{Zrd} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D}_{Zrd} \cdot \mathbf{u} \quad . \quad (6.16)$$

Der Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}}]^T$ setzt sich aus den ursprünglichen Koordinaten und deren erster Zeitableitung zusammen. Der Steuervektor $\mathbf{u} = F(t)$ besteht lediglich aus der Anregungskraft.

6.1.4 Stochastische Beschreibung der Eingangsparameter

Das Streuverhalten der Parameter wird über die Angabe von Dichtefunktionen charakterisiert (Tabellen 6.1 und 6.2). Die Materialkennwerte des Aktors und Sensors entsprechen denen des piezoelektrischen Materials PIC 151 des Herstellers PI Ceramic. Folglich sind die geometrischen Streuungen der Piezoelemente aus den Herstellerangaben [75] entnommen. Dabei werden bezüglich der Materialkennwerte keine Aussagen getroffen. Das angenommene Streuverhalten beruht daher auf Erfahrungswerten. Die geometrische Variabilität des Balkens orientiert sich ebenfalls an den Toleranzangaben des Piezomaterials, um ein Streuverhalten der gleichen Größenordnung zu gewährleisten. Als Balkenmaterial wird Aluminium angenommen. Die Streuung der Materialkennwerte gibt die Spannweite

		$X_1 = l_B$	$X_2 = s_A$	$X_4 = s_S$	$X_6 = s_F$	$X_8 = h_B$	$X_{10} = E_B$	$X_{22} = g_{f,1}$	$X_{30} = \omega_{f,3}$
Y_1	S_H	0,0796	-	-	-	0,7599	0,1344	-	-
	S_T	0,0803	-	-	-	0,7673	0,1468	-	-
Y_2	S_H	0,0612	-	-	-	0,7881	0,1365	-	-
	S_T	0,0656	-	-	-	0,7881	0,1389	-	-
Y_3	S_H	0,0519	-	-	-	0,8105	0,1270	-	-
	S_T	0,0549	-	-	-	0,8101	0,1283	-	-
Y_4	S_H	-	-	-	0,0797	0,4769	0,0480	-	0,2079
	S_T	-	-	-	0,0964	0,5686	0,0692	-	0,3025
Y_5	S_H	0,0885	0,1598	0,2139	0,3394	-	-	-	-
	S_T	0,1387	0,2328	0,2821	0,4107	-	-	-	-
Y_6	S_H	-	0,0851	0,0443	0,5042	0,0341	0,0218	0,0305	-
	S_T	-	0,1856	0,0982	0,6886	0,1045	0,0523	0,0824	-
Y_7	S_H	0,0738	-	-	-	0,5703	0,0813	-	0,1422
	S_T	0,0806	-	-	-	0,5767	0,0840	-	0,1593
Y_8	S_H	-	-	-	-	0,7383	0,1147	-	-
	S_T	-	-	-	-	0,7397	0,1169	-	-
Y_9	S_H	0,0745	-	-	0,0379	0,7239	0,1083	-	-
	S_T	0,0748	-	-	0,0619	0,7399	0,1155	-	-

Tabelle 6.3: Haupt- und Totaleffekte der adaptronischen Balkenstruktur

verschiedener Aluminiumlegierungen wieder. Der Ort der Kraftanregung im Bereich des freien Balkenendes wird ebenfalls als stochastische Variable berücksichtigt.

Die Werte der Regelungsparameter wurden empirisch festgelegt. Es wurde kein gezieltes Optimierungsverfahren angewendet. Zur Bewertung des Einflusses kleiner Variationen in der Verstärkung und Dämpfung der jeweiligen Filter auf das dynamische Verhalten des Balkens wurden die Dichtefunktionen entsprechend gewählt. Die Referenzwerte der Kreisfrequenzen entsprechen dabei ungefähr den Eigenfrequenzen des passiven Referenzsystems. Eine Filterkreisfrequenz unterhalb der jeweiligen Eigenfrequenz der Balkenstruktur ist nicht sinnvoll, daher bilden die jeweiligen Nennwerte die untere Grenze der möglichen Streuungen.

6.1.5 Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse

Die gewählte Methodik zur Durchführung der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse basiert auf den Ergebnissen des vorangegangenen Kapitels 5. Die Haupt- und Totaleffekte wurden mit den statistischen Schätzfunktionen Gl. (3.47) und Gl. (3.49) ermittelt. Die Stichprobe für die zugehörigen Monte-Carlo-Simulationen wurde mit Sobol'-Sequenzen erstellt. Es wurde eine Stichprobengröße von $N = 10000$ gewählt, was $N \cdot (k+2) = 320000$ Berechnungen des Modells entspricht.

Ein erstes wesentliches Ergebnis stellt die geringe Anzahl an relevanten Variablen dar. Es wurden insgesamt lediglich acht Parameter mit einem Haupt- oder Totaleffekt größer 0,05 identifiziert. Die entsprechenden Sensitivitätsmaße sind in Tabelle 6.3 aufgelistet. Es fällt auf, dass in keinem Fall sich die Totaleffekte von den Haupteffekten bezogen auf

den Absolutwert signifikant unterscheiden. Eine grafische Darstellung der Ergebnisse ist in Bild 6.13 (S. 102) gegeben.

Die Lage der betrachteten drei Eigenfrequenzen (Ausgangsgrößen Y_1 bis Y_3) des passiven Systems wird vor allem durch die Höhe, den E-Modul und die Länge des Balkens beeinflusst. Die Beträge der zugehörigen Sensitivitätsindizes sind dabei von gleicher Größenordnung. Dieses Ergebnis entspricht den Erwartungen. Die Dominanz der Höhe des Balkens liegt im zugehörigen kubischen Term im Flächenträgheitsmoment begründet. Will man die Variabilität der Lage der Eigenfrequenzen reduzieren, so muss die Spannweite der Balkenhöhe entsprechend verkleinert werden. In diesen Simulationen wurden Abweichungen von maximal 0,5 mm berücksichtigt.

Ein offensichtlicher Fehler der statistischen Schätzung besteht darin, dass der Total-effekt der Balkenhöhe bezüglich der dritten Eigenfrequenz S_{T,X_8,Y_3} kleiner ist als der zugehörige Haupteffekt S_{H,X_8,Y_3} . Da der Fehler quantitativ aber von sehr kleiner Größenordnung ist und die in den folgenden Abschnitten dargestellten Untersuchungen zur Fehlerbewertung der Sensitivitätsanalyse keinen Hinweis auf eine unzureichende Stichprobengröße ergeben, wird dieser als vernachlässigbar bewertet.

Bei Betrachtung der Amplituden der Resonanzstellen Y_4 bis Y_6 des aktiven Systems ergibt sich kein einheitliches Auftreten dominanter Parameter. Insbesondere für die zweite Resonanzstelle Y_5 ist die Position des Aktors s_A und Sensors s_S und der Ort der Krafteinleitung s_F von relativ großer Relevanz. Gleichzeitig sind diese Variablen für die Amplitude der ersten Resonanzstelle Y_4 unbedeutend. Neben der Balkenhöhe ist auch die Eckfrequenz des dritten Filters $\omega_{f,3}$ (dieses wurde auf die erste Eigenfrequenz des Systems abgestimmt) von Bedeutung. Die Varianz der Amplitude der dritten Resonanzstelle Y_6 wird wesentlich vom Ort der Krafteinleitung und in einem geringeren Maß von der Aktor- und Sensorposition beeinflusst. Als einziger Parameter der Regelung spielt der Verstärkungsfaktor des ersten Filters $g_{f,3}$ (abgestimmt auf die dritte Eigenfrequenz des Balkensystems) eine Rolle.

Die Unterschiede zwischen den Total- und Haupteffekten fallen bei den Ausgangsgrößen Y_4 bis Y_6 am größten aus. Die Kopplungsterme tragen allerdings auch hier nur einen vergleichsweise geringeren Teil zur Gesamtvariabilität der Ausgangsgrößen bei. Beispielsweise werden 50,42 % (wiedergegeben durch den Haupteffekt) der Varianz von Y_6 direkt durch die Variation des Ortes der Krafteinleitung s_F bedingt. Weitere 18,44 % (wiedergegeben durch die Differenz zwischen Haupt- und Totaleffekt) können durch nichtlineare Kopplungen zwischen s_F und anderen Variablen erklärt werden.

Die Lage der Resonanzstellen des aktiven Systems Y_7 bis Y_9 wird im Wesentlichen durch die gleichen Parameter beeinflusst, die auch die Eigenfrequenzen der Balkenstruktur bedingen. Dies wird durch quantitativ ähnliche Sensitivitätsindizes verdeutlicht. Lediglich die Eckfrequenz des dritten Filters $\omega_{f,3}$ übt einen nennenswerten Einfluss auf die

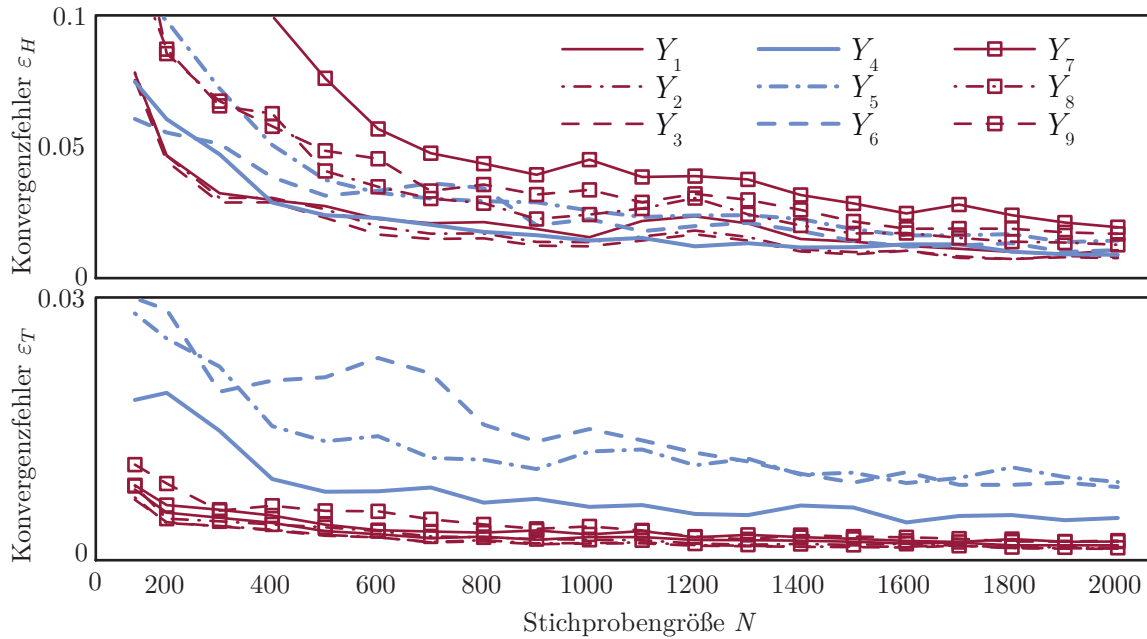


Bild 6.3: Konvergenzfehler

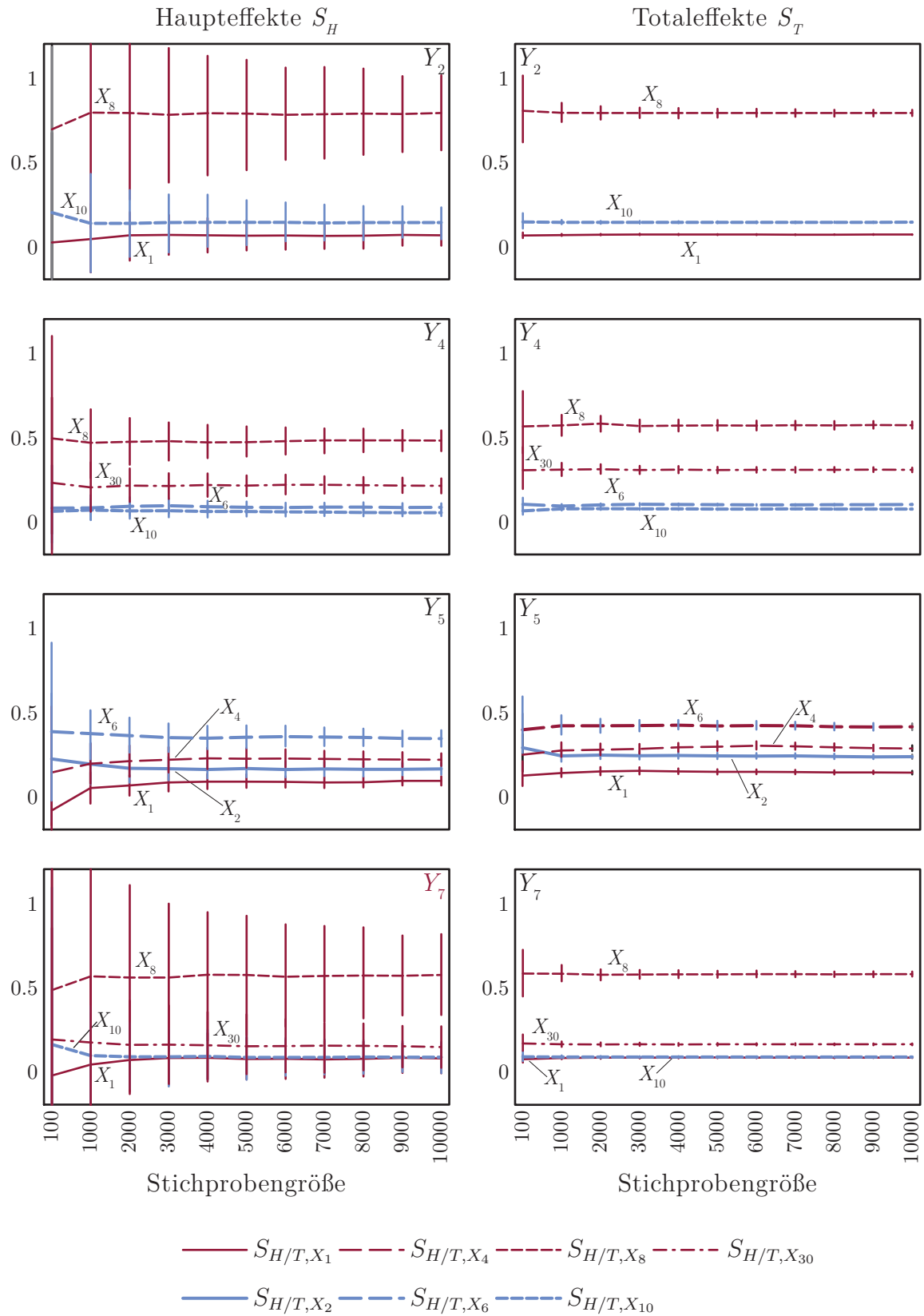
zugehörige Resonanzstelle Y_7 aus. Insgesamt fällt auf, dass neben $\omega_{f,3}$ und dem Verstärkungsfaktor $g_{f,3}$ keine weiteren Parameter der Regelung als relevant eingestuft werden. Das heißt, dass die gewählte Variabilität der Regelungsparameter (Tabelle 6.2) in Relation zu den Streuungen der Struktur- und Materialvariablen (Tabelle 6.1) klein ist.

6.1.6 Bewertung der Approximationsgüte

Die Approximationsgüte der durchgeführten statistischen Analysen soll mit der in Abschnitt 5.3 vorgestellten Methodik bewertet werden. Im ersten Schritt wird die Konvergenz durch die Berechnung des Konvergenzfehlers Gl. (4.4) bewertet. Als skalares Bewertungsmaß wird über die acht im vorherigen Abschnitt als relevant eingestuften Parameter gemittelt Gl. (4.5). In Bild 6.3 sind die Konvergenzfehler in Abhängigkeit von der Stichprobengröße für alle Ausgangsgrößen dargestellt.

Ab einer Stichprobengröße von $N = 1000$ ist der mittlere Konvergenzfehler für die Haupteffekte kleiner als 0,05. Die Fehler der Totaleffekte unterschreiten diesen Wert sogar schon bei kleineren Stichproben. Neben den kleinen Differenzen zwischen Haupt- und Totaleffekten ist dies ein weiterer Hinweis darauf, dass die hier betrachtete stochastische Beschreibung des adaptronischen Piezobalkens mathematisch weniger komplex ist als das im vorherigen Kapitel behandelte System eines Ein-Masse-Schwingers.

Der 95 %-Vertrauensbereich wird mit der Bootstrap-Resampling-Methode ermittelt. Es wird eine Resampling-Anzahl von $B = 1000$ gewählt. Die Ergebnisse sind in Bild 6.4 exemplarisch für die Ausgangsgrößen Y_2, Y_4, Y_5 und Y_7 und die zugehörigen relevanten



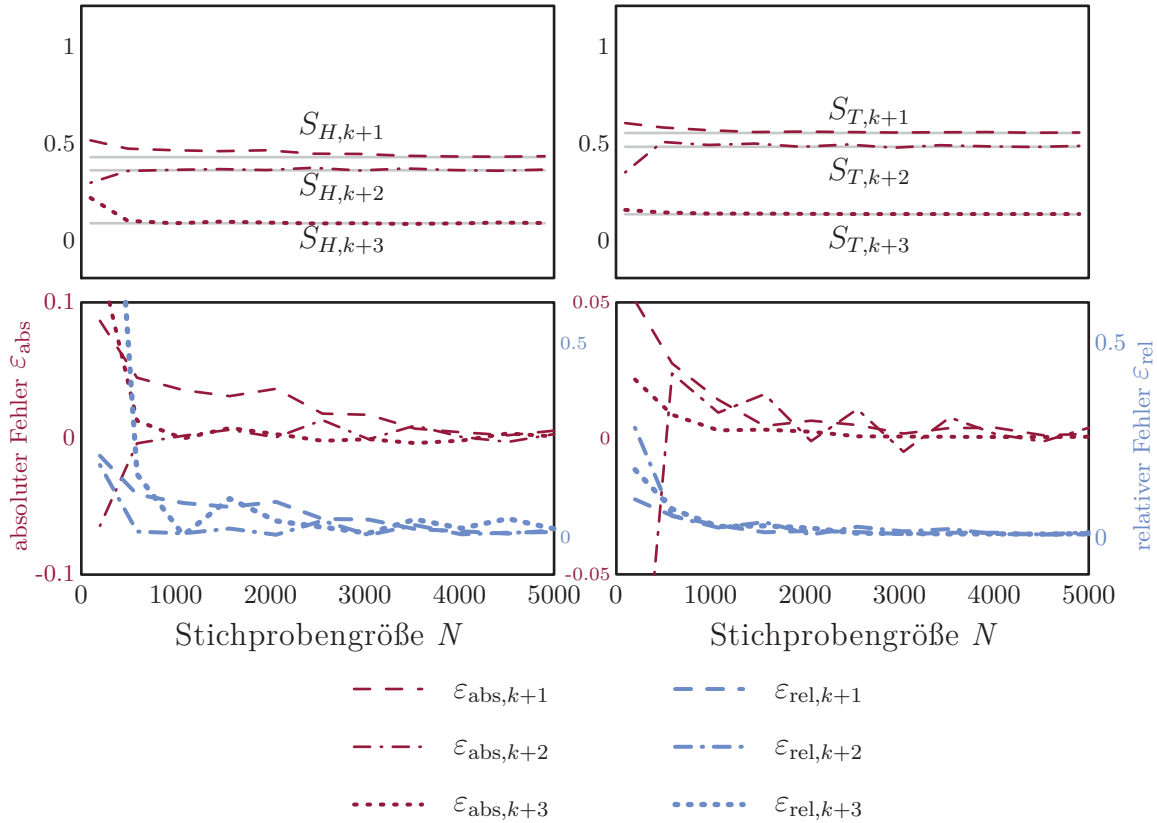


Bild 6.5: Statistisch geschätzte Sensitivitätsmaße, absolute und relative Fehler

Haupt- und Totaleffekte dargestellt. Da einige Effektwerte sehr nah beieinander liegen, wird eine eindeutige Trennung der Vertrauensbereiche erst für sehr hohe Stichprobengrößen erreicht. Auffällig ist, dass die Konfidenzintervalle der Haupteffekte im Vergleich zu denen der Totaleffekte wesentlich größer sind. Es wird vermutet, dass die Ursache hierfür in der Dominanz der Terme erster Ordnung, die über den Haupteffekt dargestellt werden, begründet liegt. Für Haupteffekte mit vergleichsweise großen Beträgen wird die Überschneidung der Vertrauensbereiche ab einer Stichprobengröße von $N = 3000$ vermieden. Eine Ausnahme bilden die Konfidenzintervalle der Ausgangsgröße Y_7 (erste Resonanzstelle des aktiven Systems). Eine eindeutige Trennung der Bereiche findet für den größten Haupteffekt erst ab einer Stichprobengröße von $N = 8000$ statt.

Aufgrund der grundsätzlichen stochastischen Unabhängigkeit der zusätzlichen Variablen ist vorauszusehen, dass die Implementierung einer funktionalen stochastischen Verschiebung (Kapitel 4.4) analog zu den vorangegangenen Untersuchungen des Ein-Masse-Schwingers (Abschnitt 5.3.3) zu qualitativ gleichen Ergebnissen führt. Der Vollständigkeit halber wurde dennoch eine entsprechende Analyse vorgenommen. Die Erweiterungsfunktion wurde in der Form Gl. (5.8) übernommen mit den Parameterwerten $a_1 = 0, 1, a_2 = 0, 2, a_3 = 1, 5$ und den Koeffizienten $K_1 = K_2 = K_3 = \sqrt[m=3]{\text{Var}[Y]}$. Die

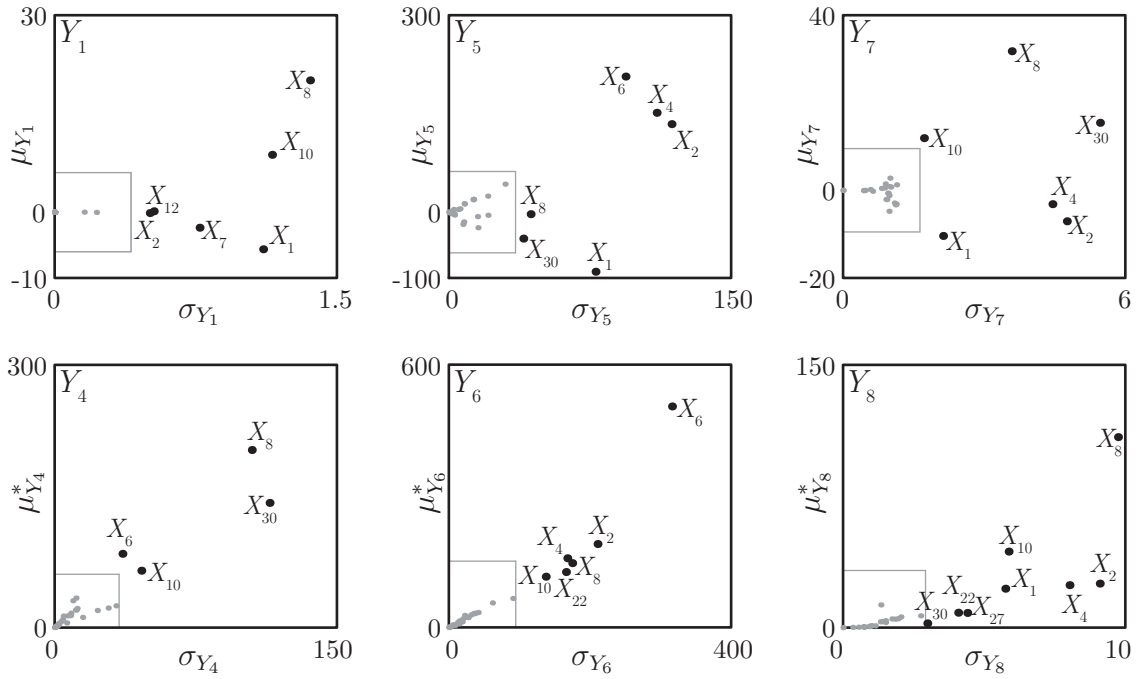


Bild 6.6: Identifikation irrelevanter Variablen mit dem Morris-Screening-Test

entsprechenden Ergebnisse sind in Bild 6.5 dargestellt. Sowohl der absolute als auch der relative Fehler sind ab einer Stichprobengröße von $N = 3500$ vernachlässigbar.

6.1.7 Morris-Screening

Die Implementierung einer Rastersuche mit der von Morris [70] vorgestellten Methode (Abschnitt 3.4) dient an dieser Stelle der Identifizierung einer geeigneten Vorgehensweise. Ziel des Screening-Tests ist es, alle tatsächlich relevanten Parameter korrekt zu erfassen. Die Ergebnisse werden der folgenden Untersuchung eines numerischen Modells des Balkensystems zugrunde gelegt.

Der Parameterraum wurde mit $p = 8$ Stufen diskretisiert und als Schrittweite wurde $\Delta = \frac{4}{7}$ vorgegeben. Die Wahl entspricht den Empfehlungen aus [14, 87]. Für die Erstellung der Stichprobe wurde eine Grundgesamtheit von $M = 500$ möglichen Trajektorien aufgestellt. Es wurde eine maximale Anzahl von $N_{\max} = 5000$ Simulationsdurchläufen vorgegeben. Da der Rechenbedarf eines Pfades $k + 1$ Modellberechnungen benötigt, beinhaltet die Stichprobe $r = 161$ ($r \cdot (k + 1) < N_{\max}$) Trajektorien. Somit können für jeden der $k = 30$ Parameter 161 Elementareffekte berechnet werden. Die Auswahl einer möglichst raumfüllenden Kombination von Pfaden erfolgt, indem zufällig $R = 2000$ Zusammenstellungen von 161 Trajektorien aus der betrachteten Grundgesamtheit ausgewählt werden. Diejenige Kombination mit der größten Spannweite als Kriterium der Ausfüllung des gegebenen Parameterraums wird als Stichprobe der Rastersuche zugrunde gelegt. Exemplarisch sind für einige Ausgangsgrößen in Bild 6.6 die resultierenden

r	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	161
$n_{\text{lim, max}}$	0,46	0,37	0,37	0,38	0,43	0,41	0,44	0,55	0,47	0,52	0,52
n_{rel}	11	12	13	13	11	10	11	8	9	9	9

Tabelle 6.4: Maximale Grenzfaktoren zur Vermeidung von Typ-II-Fehlern und Anzahl identifizierter relevanter Variablen

Bewertungsmaße μ, μ^*, σ dargestellt. Zur Identifizierung irrelevanter Parameter wurde folgende Vorgehensweise implementiert.

1. Für jede Ausgangsgröße Y_i wird der Maximalwert der Bewertungsmaße μ, μ^*, σ über alle Eingangsparameter ausgelesen

$$\mu_{i,\text{max}} = \max_{j \in \{1,2,\dots,k\}} [\mu_{i,j}] \quad , \quad \mu_{i,\text{max}}^* = \max_{j \in \{1,2,\dots,k\}} [\mu_{i,j}^*] \quad , \quad (6.17a)$$

$$\sigma_{i,\text{max}} = \max_{j \in \{1,2,\dots,k\}} [\sigma_{i,j}] \quad . \quad (6.17b)$$

2. Es wird ein Grenzfaktor n_{lim} festgelegt.
3. Ein Parameter X_j wird als relevant eingestuft, wenn einer der zugehörigen Sensitivitätsindizes größer ist als das Produkt des Grenzfaktors mit dem entsprechenden Maximalwert

$$X_j : \begin{cases} \text{relevant} & , \text{ wenn } \mu_{i,j} \geq n_{\text{lim}} \cdot \mu_{i,\text{max}} \text{ oder } \mu_{i,j}^* \geq n_{\text{lim}} \cdot \mu_{i,\text{max}}^* \text{ oder} \\ & \sigma_{i,j} \geq n_{\text{lim}} \cdot \sigma_{i,\text{max}} \quad \forall \quad i \quad , \\ \text{irrelevant} & , \text{ sonst } \quad . \end{cases} \quad (6.18)$$

In Bild 6.6 wurde der Grenzfaktor zu $n_{\text{lim}} = 0,3$ gewählt. Die Bereiche irrelevanter Variablen, gekennzeichnet durch Rechtecke mit grauem Rand, werden von den resultierenden Grenzwerten für die jeweiligen Bewertungsmaße festgelegt. Es werden die Variablen $X_1, X_2, X_4, X_6, X_7, X_8, X_{10}, X_{12}, X_{22}, X_{27}$ und X_{30} als relevant identifiziert. Demnach werden drei Typ-I-Fehler begangen, da die irrelevanten Parameter X_7, X_{12}, X_{27} fälschlicherweise als bedeutend angenommen werden. Für eine nachfolgende quantitative Untersuchung sind derartige Fehler bezüglich des zusätzlichen aber nicht notwendigen Rechenaufwands von Bedeutung. Kritisch hingegen sind Typ-II-Fehler, wobei relevante Variablen fälschlicherweise als unbedeutend eingestuft und in der nachfolgenden Analyse nicht betrachtet werden.

In Tabelle 6.4 sind die maximalen Werte des Grenzfaktors, sodass kein Typ-II-Fehler begangen wird, aufgelistet. Weiterhin ist die Anzahl der als relevant eingestuften Variablen dargestellt. Wie zu erwarten ist, sinkt die Anzahl an Typ-I-Fehlern tendenziell mit der Größe der Stichprobe. Zu beachten ist, dass die hier ermittelten maximalen Grenzfaktoren selbst Zufallsvariablen darstellen. Da bei der Stichprobenerstellung auf

eine möglichst gute Abtastung des Parameterraums geachtet wurde, können diese dennoch als Richtwerte verwendet werden und es wird an dieser Stelle auf eine statistische Analyse verzichtet.

Wird bei der Durchführung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse von einer hinreichenden Stichprobengröße von $N = 1000$ und einer erfolgten Rastersuche mit drei Typ-I-Fehlern und ohne Typ-II-Fehler ausgegangen, so reduziert sich im betrachteten Fall der benötigte Rechenaufwand um $1000 \cdot (30 + 2) - 1000 \cdot (10 + 2) = 20000$ Simulationsdurchläufe. Die verbleibende Anzahl benötigter Modellberechnungen beträgt 12000.

6.1.8 Metamodellierung mit künstlichen neuronalen Netzen

Bei rechenintensiven Modellen reichen die verfügbaren Rechenzeiten in einigen Fällen nicht für eine komplette statistische Untersuchung aus. Selbst nach einer deutlichen Reduzierung der Anzahl zu berücksichtigender Variablen nach einem Screening-Test sind noch viele Tausend Simulationsdurchläufe notwendig. Dies wurde beispielhaft am aktiven Balkensystem aufgezeigt. Eine Möglichkeit, den Rechenaufwand deutlich zu verringern besteht im Einsatz von Metamodellen. Hier soll die Eignung von neuronalen Netzwerken (Abschnitt 3.5) bewertet werden.

Anhand des analytischen Balkensystems und der durchgeführten vollständigen varianzbasierten Sensitivitätsanalyse soll ein Netzwerk identifiziert werden, welches das Modellverhalten für alle neun Ausgangsgrößen des Systems bei möglichst kleiner Anzahl an durchzuführenden Simulationen in geeigneter Weise approximiert. Als variable Größen werden die Stichprobengröße N für die Trainingsdaten und die Anzahl an Neuronen s in der verdeckten Schicht berücksichtigt. Die gefundenen Einstellungen sollen zur Metamodellierung eines FE-Modells des Balkensystems verwendet werden. Die Stichproben wurden mittels Sobol'-Sequenzen erstellt. Es wird für jede einzelne Ausgangsgröße ein separates Netz in der Form von Bild 3.2 (S. 38) erstellt.³

Als erste Bewertungsgröße wird die Rangfolge $n_{\text{Rank}, NN}$ der als relevant ($S_H \vee S_T > 0,05$) eingestuft Variablen herangezogen. Das Fehlermaß $\varepsilon_{\text{Rank}}$ setzt sich aus der Summe der Differenzbeträge in der Rangfolge aller relevanten Parameter zusammen. Als Bezugsrangfolgen werden die Ergebnisse $n_{\text{Rank}, SA}$ der vollständigen statistischen Sensitivitätsanalyse angesehen

$$\varepsilon_{Y_i, \text{Rank}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{rel}, i}} |n_{Y_i, \text{Rank}, NN} - n_{Y_i, \text{Rank}, SA}| \quad . \quad (6.19)$$

³Die Implementierung mehrerer Ausgangsneuronen in einem einzelnen Netz führte zu nicht zufriedenstellenden Ergebnissen.

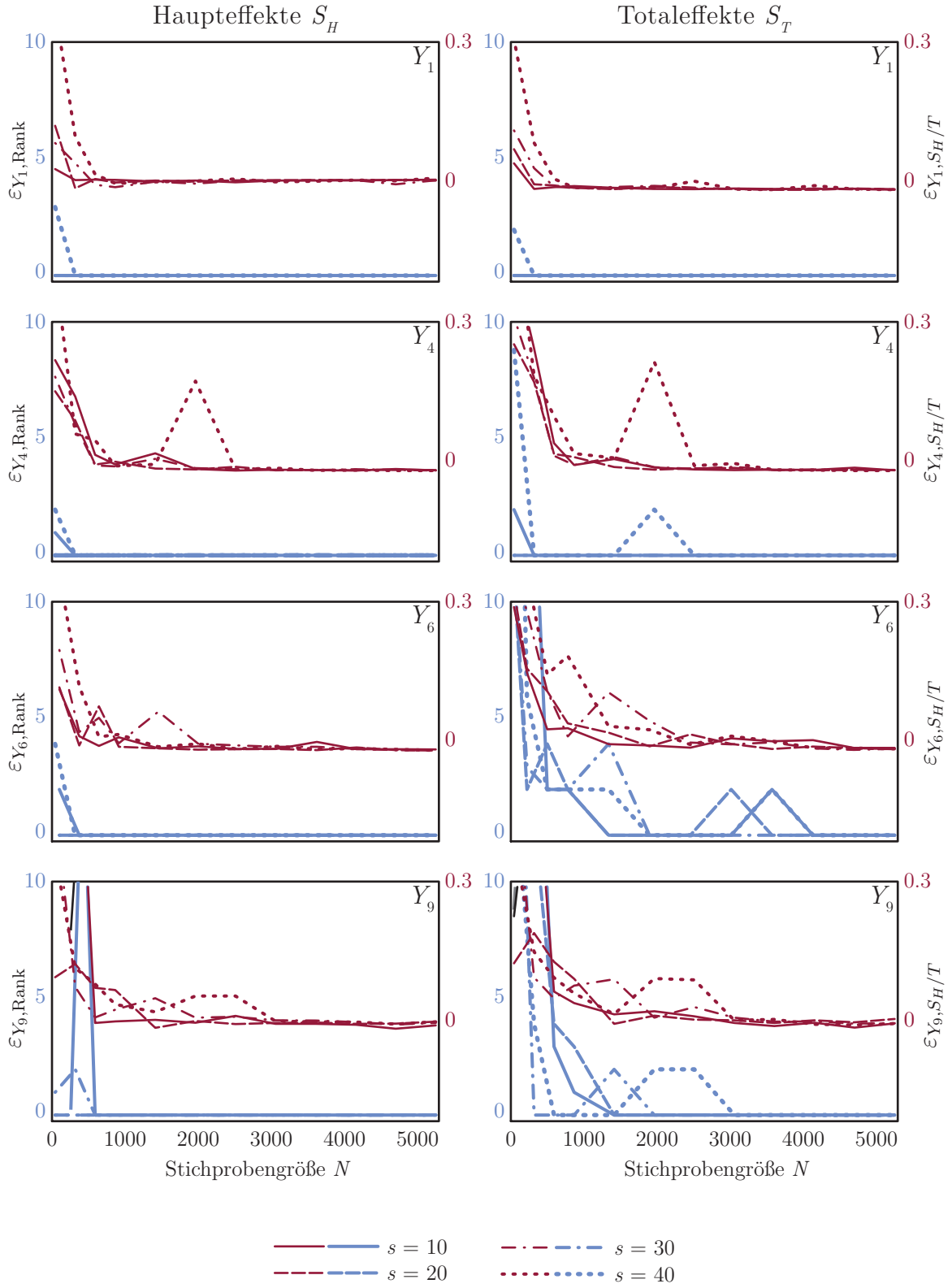


Bild 6.7: Fehleranalyse der Metamodellierung mit neuronalen Netzwerken

Y_6	$X_2 = s_A$	$X_4 = s_S$	$X_6 = s_F$	$X_8 = h_B$	$X_{10} = E_B$	$X_{22} = g_{f,1}$
$n_{\text{Rank},SA}$	2	4	1	3	6	5
$S_{T,SA}$	0,1856	0,0982	0,6886	0,1045	0,0523	0,0824
$n_{\text{Rank},NN}$	2	3	1	4	6	5
$S_{T,NN}$	0,1836	0,0998	0,6893	0,0957	0,0514	0,0828

Tabelle 6.5: Werte und Rangfolge der Sensitivitätsmaße bezüglich Y_6 , ermittelt anhand eines neuronalen Netzwerkes mit $s = 20$, $N = 3000$

$n_{\text{rel},i}$ bezeichnet hier die Anzahl der relevanten Variablen bezüglich der Ausgangsgröße Y_i . $\varepsilon_{\text{Rank}}$ kann somit als ein qualitatives Gütekriterium betrachtet werden.

Ein quantitatives zweites Bewertungsmaß stellt die Summe der Differenzbeträge der ermittelten Sensitivitätsmaße dar. Auch hier werden lediglich die für die jeweilige Ausgangsgröße Y_i als relevant identifizierten Parameter berücksichtigt

$$\varepsilon_{Y_i, S_{H/T}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{rel},i}} |S_{H/T, Y_i, NN} - S_{H/T, Y_i, SA}| \quad . \quad (6.20)$$

In Bild 6.7 sind die ermittelten Fehlermaße $\varepsilon_{\text{Rank}}$ und $\varepsilon_{S_{H/T}}$ beispielhaft für die Ausgangsgrößen Y_1 , Y_4 , Y_6 und Y_9 dargestellt. Eine erste wesentliche Erkenntnis ist, dass die Fehler aller Netzwerke unabhängig von der Anzahl an Neuronen in der verdeckten Schicht mit steigender Stichprobengröße gegen Null konvergieren. Weiterhin fällt auf, dass die Netze mit einer hohen Anzahl an Neuronen $s = 40$ vermehrt fehlerbehaftet sind. Es wird vermutet, dass die zugehörige Trainingsphase, d. h. die Optimierung der entsprechenden Koeffizienten, aufgrund der standardmäßig vorgegebenen maximalen Anzahl an Iterationsschritten abgebrochen und somit das Optimum nicht gefunden wird. Für die anderen Netzwerke scheint es allerdings keinen Zusammenhang zwischen der Approximationsgüte und der Neuronenanzahl auch bei kleinen Stichprobengrößen zu geben.

Für die Lage der Eigenfrequenzen (Y_1 bis Y_3 , abgebildet sind stellvertretend die Sensitivitätsmaße bezüglich Y_1) konvergieren sowohl $\varepsilon_{\text{Rank}}$ als auch $\varepsilon_{S_{H/T}}$ schon ab einer Stichprobengröße $N = 1000$ gegen Null. Zur ebenfalls fehlerfreien Charakterisierung des aktiven Systems Y_4 bis Y_9 benötigen die neuronalen Netze allerdings vergleichsweise größere Stichproben ($N > 2500$) als Trainingsdaten.

In Tabelle 6.5 sind die Totaleffekte und die zugehörige Rangfolge des neuronalen Netzes mit $s = 20$, $N = 3000$ bezüglich der Ausgangsgröße Y_6 aufgelistet. Zum Vergleich sind die Referenzmaße der vollständigen statistischen Sensitivitätsanalyse mitaufgeführt. Der qualitative Fehler wird durch die Vertauschung eines Parameterpaars X_4, X_8 hervorgerufen. Die Unterschiede in den Sensitivitätsmaßen sind dabei sehr klein. Der qualitative Fehler in der ermittelten Rangfolge ist somit vernachlässigbar.

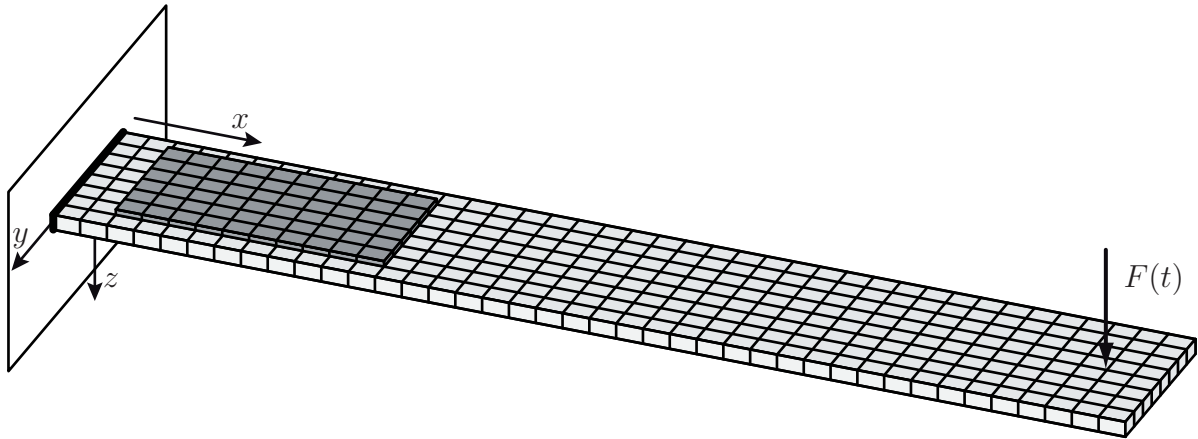


Bild 6.8: 3D-Finite-Elemente-Modell des Kragbalkens mit 2409 Freiheitsgraden

Insgesamt ist die Aussage zulässig, dass neuronale Netze mit einer mittleren Anzahl an Neuronen ($s = 20, 30$) beim betrachteten Kragbalkensystem ab einer Trainingsdatensmenge von etwa $N = 2500$ sehr gut zur qualitativen und quantitativen Approximation aller Ausgangsgrößen geeignet sind und die entsprechenden Sensitivitätsmaße ebenfalls korrekt berechnet werden. Allerdings besteht die grundsätzliche Problematik, dass in der Regel keine Referenzberechnungen zum Vergleich verfügbar und die Einstellungen (Stichprobengröße, Anzahl an Neuronen) vom jeweils betrachteten System abhängig sind. Weiterhin geht die physikalische Beschreibung des Systems durch die Metamodellierung verloren, sodass auch hierüber keine Rückschlüsse über die Approximationsgüte des neuronalen Netzes getroffen werden können. Wird jedoch, wie in Abschnitt 6.1.7 beschrieben, gleichzeitig eine Rastersuche durchgeführt, so lässt sich zumindest ein qualitativer Vergleich bei einem moderat ansteigenden Rechenaufwand ziehen.

6.2 Finite-Elemente-Modellierung

6.2.1 Strukturmodellierung

Das Finite-Elemente-Strukturmodell des eingespannten Balkens (Bild 6.8) wurde mit der kommerziellen Software ANSYS (Version 11) erstellt. Es wurden ausschließlich lineare Volumenelemente verwendet. Der Elementtyp SOLID5 mit acht Knotenpunkten ermöglicht die Berücksichtigung gekoppelter Felder und eignet sich daher zur Abbildung des piezoelektrischen Effekts, indem die entsprechenden Konstitutivbeziehungen Gl. (6.2) für alle Raumrichtungen berücksichtigt werden. Jedem Knotenpunkt werden dabei vier Freiheitsgrade (Auslenkungen in drei Raumrichtungen, elektrischer Freiheitsgrad in Volt) zugeordnet. Für die Balkenstruktur wurde ebenfalls ein Elementtyp mit

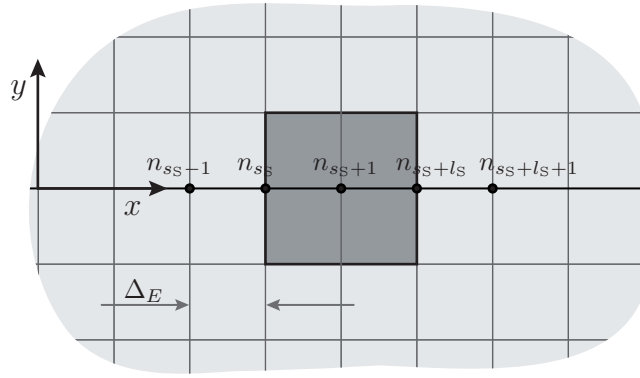


Bild 6.9: Ausschnitt der Balkenunterseite an der Sensorposition

acht Knotenpunkten verwendet (SOLID45). Für die Elementgröße wurde eine Kantenlänge von 0,5 cm vorgegeben. Diese wird, abhängig von den jeweiligen Vorgaben der Geometrieparameter, automatisiert angepasst.

Die Anbindung der Aktor- und Sensorelemente (der Sensor ist in Bild 6.8 verdeckt) erfolgt mit dem Multiple-Points-Constraints-Verfahren (MPC). Auf der Balkenoberfläche wird eine Kontaktfläche (Contact Surface) und auf der Oberfläche der Piezoelemente eine Zielfläche (Target Surface) definiert. Die zugehörigen Knotenpunkte werden über kinematische Beziehungen miteinander verknüpft. Die Art dieser kinematischen Gleichungen kann lediglich über die Vorgabe von sogenannten Keyoptionen beeinflusst werden. Hier wird durch die Vorgabe „always bonded“ eine stetige physikalische Verbindung des Piezoaktors und -sensors erzwungen. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Unabhängigkeit von der Lage der Knotenpunkte auf den jeweiligen Kontakt- und Zielflächen. Dies ermöglicht erst eine stochastische Strukturanalyse, in der die Elementgröße von den im jeweiligen Simulationsdurchlauf definierten Parametereinstellungen abhängt.

Die linke Seite der resultierenden Bewegungsgleichungen ist wieder von der Form Gl. (6.14). Die rechte Seite $\mathbf{B} \cdot [F(t) \ V_A(t)]$ wird um die Aktorspannung als Eingangsgröße erweitert. Diese wird bei der Implementierung der Regelung wieder in die linke Seite der Gleichungen integriert. Das Strukturmodell besitzt mit den Referenzwerten der Parameter (Tabellen 6.1, 6.2) insgesamt $n = 2409$ Freiheitsgrade.

Zur Berechnung der über einen Ladungsverstärker ausgegebenen Ausgangsspannung wird die erste Ortsableitung am Sensoranfang $w'(x = s_s, t)$ und -ende $w'(x = s_s + l_s, t)$ benötigt (Gl. (6.8)). Diese kann allerdings nicht direkt vom FEM-Modell ausgegeben werden. Es können lediglich die Auslenkungen $w(x, t)$ an den Knotenpunkten ausgelesen werden. Mit der Auslenkung der Knotenpunkte in der Mitte der Balkenunterseite

(Bild 6.9) werden die benötigten Terme angenähert

$$w'(x = s_S, t) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{w_{n_{s_S}} - w_{n_{s_S-1}}}{\Delta_E} + \frac{w_{n_{s_S+1}} - w_{n_{s_S}}}{\Delta_E} \right) , \quad (6.21a)$$

$$w'(x = s_S + l_S, t) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{w_{n_{s_S+l_S}} - w_{n_{s_S+l_S-1}}}{\Delta_E} + \frac{w_{n_{s_S+l_S+1}} - w_{n_{s_S+l_S}}}{\Delta_E} \right) . \quad (6.21b)$$

Δ_E bezeichnet die Kantenlänge der Elemente und w_n die Auslenkung in z -Richtung am Knotenpunkt n .

6.2.2 Modellreduktion

In dem hier betrachteten Fall ist die Größe des numerischen Modells als moderat anzusehen. Im allgemeinen Fall jedoch werden komplexe Strukturen mit der Finite-Elemente-Methode modelliert, woraus Bewegungsgleichungen mit einer sehr großen Anzahl an Freiheitsgraden ($n \gg 10^5$) entstehen können. Ist man an schnellen transienten Simulationen, der Implementierung von Regelungsalgorithmen und der Simulation des dynamischen Verhaltens des aktiven Systems interessiert, so stoßen hierfür verfügbare Softwareumgebungen, wie das hier verwendete MATLAB, schon bei relativ kleinen numerischen Modellen an ihre Grenzen. In diesen Fällen ist die Durchführung einer Modellreduktion notwendig. Als Beispiele aus eigenen Vorarbeiten sei die Modellierung und Simulation aktiver Fassaden [104], einer aktiven Ölwanne [36, 105] und eines aktiven Schwingungsisolierungssystems [37, 39] erwähnt.

Die Zustandsraumdarstellung in der Form von Gl. (6.15)⁴ setzt sich im allgemeinen Fall zusammen aus der Zustandsmatrix $\mathbf{A}_{2n \times 2n}$ ⁵, der Eingangsmatrix $\mathbf{B}_{2n \times l}$, der Ausgangsmatrix $\mathbf{C}_{j \times 2n}$, der Durchgangsmatrix $\mathbf{D}_{j \times l}$, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_{2n \times 1}$ und dem Eingangsvektor $\mathbf{u}_{l \times 1}$. n bezeichnet die Anzahl an Freiheitsgraden, l die Anzahl an Eingangsgrößen und j die Anzahl an Ausgangsgrößen.

Eine allgemeine mathematische Beschreibung der Modellreduktion wird durch die Projektion des Zustandsvektors \mathbf{x} auf einen neuen Variablenvektor \mathbf{p}

$$\mathbf{x}_{2n \times 1} = \mathbf{V}_{2n \times r} \cdot \mathbf{p}_{r \times 1} + \varepsilon \quad (6.22)$$

mit $r \ll 2n$ gegeben. Die entsprechenden reduzierten Bewegungsgleichungen in Zustandsraumdarstellung erhält man durch eine Transformation von Gl. (6.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} , \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (6.23)$$

⁴Im Folgenden wird auf den Index „Zrd“ verzichtet. Die Steuermatrix \mathbf{B} und Durchgangsmatrix \mathbf{D} sind dabei von den gleichnamigen Matrizen der Bewegungsgleichung Gl. (6.14) zu unterscheiden. Die verwendete Bedeutung geht eindeutig aus dem jeweiligen Zusammenhang hervor.

⁵Der Index bezieht die Dimension der jeweiligen Matrix.

Der Eingangsvektor \mathbf{u} und der Ausgangsvektor \mathbf{y} bleiben dabei im reduzierten Modell erhalten. Eine geeignete Wahl der Transformationsmatrix \mathbf{V} minimiert den Fehler ε und führt zu einem adäquaten reduzierten Modell, welches das dynamische Verhalten des Originalsystems korrekt wiedergibt.

In dem hier betrachteten Anwendungsfall wird ein Reduktionsalgorithmus basierend auf Krylov-Unterräumen implementiert [5, 31]. Im Folgenden sollen dabei lediglich die wesentlichen Schritte dargestellt werden. Eine detaillierte Beschreibung der Modellreduktion mit einer strukturdynamischen Anwendung wird beispielsweise in [79] gegeben.

Die Übertragungsfunktion von Gl. (6.15) lautet mit der komplexen Variable s

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad . \quad (6.24)$$

$\mathbf{Y}(s)$ und $\mathbf{U}(s)$ bezeichnen die Laplacetransformationen von $\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{u}(t)$. Die Übertragungsfunktion lässt sich nach einer Potenzreihenentwicklung um den Punkt s_0 umformulieren

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\mathbf{C} \cdot (s_0 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{i-1} \cdot \mathbf{B}}_{=m_i} \cdot (s_0 - s)^i \quad . \quad (6.25)$$

Gleichzeitig kann die Übertragungsfunktion Gl. (6.24) durch eine Padé-Approximation der Ordnung q

$$\mathbf{H}_q(s) = \frac{b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_qs^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_1s + 1} \quad (6.26)$$

angenähert werden, indem die $2q$ Koeffizienten $b_0, \dots, b_{q-1}, a_1, \dots, a_q$ so gewählt werden, dass die $2q$ Momente der Potenzreihe m_1, \dots, m_{2q} adäquat abgebildet werden. Eine explizite Berechnung der Koeffizienten über die exakte Berechnung der Momente ist allerdings wegen numerischer Instabilitäten nur eingeschränkt möglich [79]. Eine implizite Übereinstimmung der ersten q Momente ist allerdings gegeben, wenn die Transformationsmatrix \mathbf{V} aus einer beliebigen Basis des Krylov-Unterraums

$$K_q^V(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \text{span}\{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{-q}\mathbf{B}\} \quad (6.27)$$

gebildet wird [5, 31]. Für große zeitinvariante Gleichungssysteme kann eine effiziente Bestimmung einer zugehörigen orthogonalen Basis iterativ mit dem Arnoldi-Algorithmus [4] erfolgen. Die beschriebene Vorgehensweise ist in der Software MORFORANSYS [82] implementiert. Diese wurde im Rahmen der hier beschriebenen Untersuchungen eingesetzt. Neben der gewünschten Größe des reduzierten Modells lassen sich dabei auch die auszugebenden Antwortvariablen festlegen, wobei die Knotennummer und der zugehörige Freiheitsgrad angegeben werden muss. Die Ausgangsmatrix des reduzierten Modells \mathbf{C}_r setzt sich aus den entsprechenden Zeilen des Produkts $\mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$ zusammen. Die

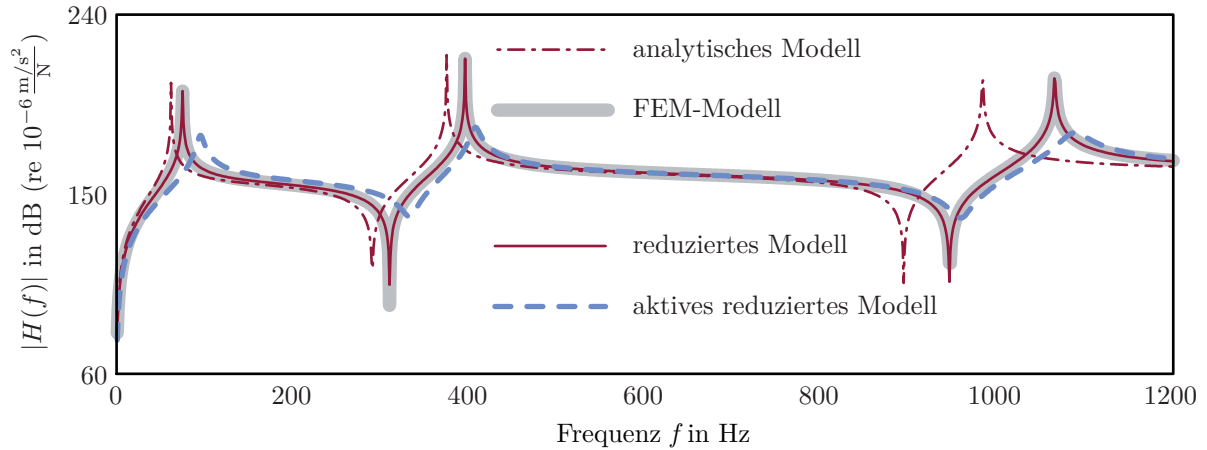


Bild 6.10: Übertragungsfunktionen des analytischen, FEM- und reduzierten aktiven und passiven Modells

	1. Eigenfrequenz	2. Eigenfrequenz	3. Eigenfrequenz
analytisches Modell	62,1 Hz	375,1 Hz	983,5 Hz
FEM-Modell	74,8 Hz	395,9 Hz	1065,4 Hz
relative Abweichung	20,5 %	5,5 %	8,3 %

Tabelle 6.6: Vergleich der Eigenfrequenzen

Durchgangsmatrix besteht lediglich aus Nulleinträgen, da die Ausgabegrößen sich auf die vom Elementtyp des FEM-Modells vorgegebenen Freiheitsgrade (Auslenkungen in den Raumkoordinaten) beschränken. Die Ausgangsgleichung des reduzierten Modells lautet demnach

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{p} \quad . \quad (6.28)$$

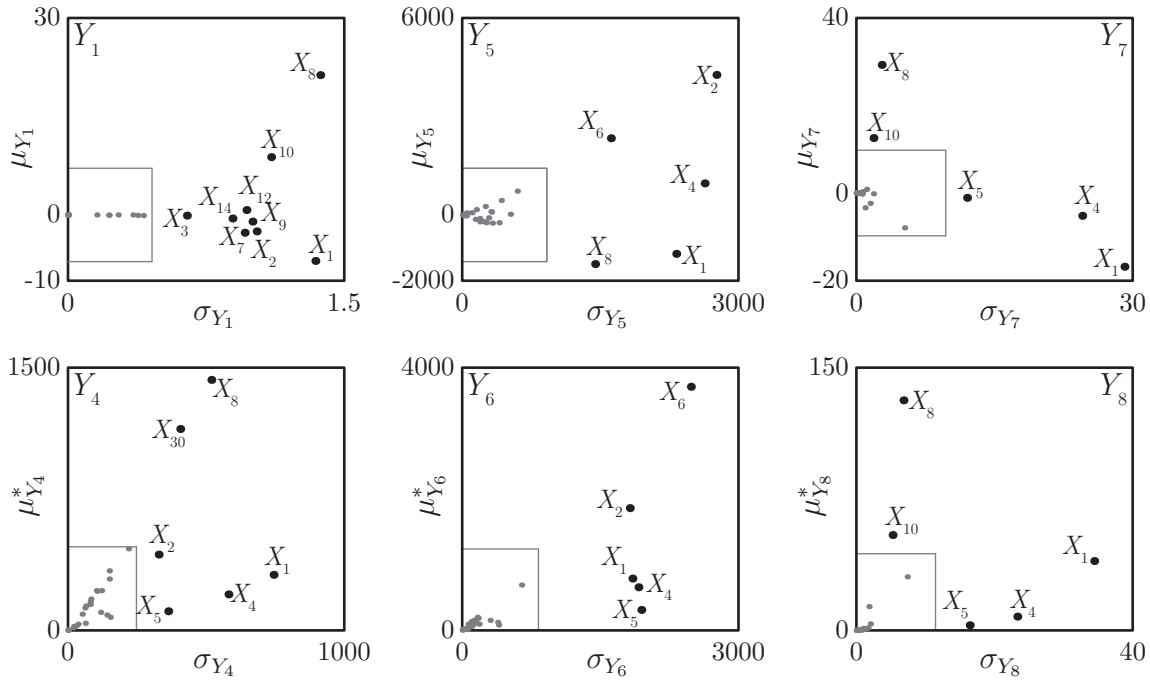
Die Größe der reduzierten Modelle wurde in den durchgeführten Simulationen zu $r = 40$ gewählt.⁶ Ein Vergleich des reduzierten Modells mit dem Finite-Elemente-Modell der Balkenstruktur ist in Bild 6.10 dargestellt. Es wird die Übertragungsfunktion zwischen Kraftanregung und der Beschleunigung des Balkenendes betrachtet. Das dynamische Verhalten wird im betrachteten Frequenzbereich korrekt abgebildet.

6.2.3 Simulation des aktiven Systems

Zum weiteren Vergleich ist die anhand des analytischen Modells ermittelte Übertragungsfunktion dargestellt. Es sind relativ deutliche Unterschiede in der Lage der Eigenfrequenzen festzustellen (Tabelle 6.6). Diese werden bedingt durch die Anwendung

⁶Das Programm MORFORANSYS gibt in diesem Fall die Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus. Es wird also eine Vorgabe von 20 Freiheitsgraden gegeben.

	Parameter	Benennung	Referenzwert	Dichtefunktion
24	$\omega_{f,1}$	Kreisfrequenz Filter 1	$1065,4 \cdot 2\pi$	$\mathcal{U}(1065,4; 1165,4) \cdot 2\pi$
27	$\omega_{f,2}$	Kreisfrequenz Filter 2	$395,9 \cdot 2\pi$	$\mathcal{U}(395,9; 495,9) \cdot 2\pi$
30	$\omega_{f,3}$	Kreisfrequenz Filter 3	$74,8 \cdot 2\pi$	$\mathcal{U}(74,8; 174,8) \cdot 2\pi$

Tabelle 6.7: Filterkreisfrequenzen für das FEM-Modell**Bild 6.11:** Identifikation irrelevanter Variablen des FEM-Modells mit einem Morris-Screening

der MPC-Methode zur Anbindung des Piezoaktors und -sensors an die Balkenstruktur im Finite-Elemente-Modell. Die aufgestellten kinematischen Beziehungen bewirken eine Versteifung der Balkenstruktur, die vom analytischen Modell nicht wiedergegeben wird. Zur Simulation des aktiven Systems (Bild 6.10) werden daher die Eckfrequenzen der drei Filter angepasst (Tabelle 6.7).

Die Resonanzstellen des aktiven Systems sind gegenüber dem analytischen Modell (Bild 6.2) bei gleichen Parametereinstellungen (außer den Kreisfrequenzen der Filter) erhöht. Auf eine Optimierung der Regelungsparameter wird verzichtet, um die Vergleichbarkeit der Sensitivitätsanalyse zwischen dem analytischen und numerischen Modell zu gewährleisten.

6.2.4 Morris-Screening

Anhand des analytischen Modells des Kragbalkensystems wurde in Abschnitt 6.1.7 beschrieben, wie sich die Anzahl zu berücksichtigender Variablen in einer varianzbasierten

Sensitivitätsanalyse verringern lässt und sich somit der benötigte Rechenaufwand reduziert. Dennoch verbleibt eine hohe Anzahl an durchzuführenden Simulationsläufen, die eine entsprechende Analyse von aufwändigeren numerischen Modellen erschwert. Mit der Implementierung von neuronalen Netzwerken zur Identifizierung eines geeigneten Metamodells (Abschnitt 6.1.8) konnte der Rechenaufwand weiter deutlich reduziert werden.

Eine Beurteilung der anhand des Metamodells ermittelten Sensitivitätsmaße ist allerdings nicht möglich, da hierfür eine vollständige statistische Analyse notwendig ist. Stattdessen wird gleichzeitig neben dem neuronalen Netzwerk eine Rastersuche durchgeführt, womit ein qualitativer Vergleich durchführbar ist. Dabei wird die in Abschnitt 6.1.7 beschriebene Vorgehensweise übernommen. Es wird analog zu den Untersuchungen des analytischen Modells dieselbe Stichprobe mit einer maximalen Anzahl an Simulationsdurchläufen $N_{\max} = 5000$ und entsprechenden $r = 161$ Trajektorien zugrunde gelegt. Als Grenzfaktor wird $n_{\lim} = 1/3$ gewählt, was anhand Tabelle 6.4 als angemessener Wert zur Vermeidung von Typ-II-Fehlern erscheint. Es werden dreizehn Variablen X_1 bis X_{10} sowie X_{12} , X_{14} und X_{30} als relevant eingestuft.

Die Ergebnisse sind in Bild 6.11 grafisch dargestellt. Vergleicht man diese mit der anhand des analytischen Modells durchgeführten Rastersuche, so fällt auf, dass die Resonanzamplituden des aktiven Systems (Y_4 bis Y_6) deutlich größer ausfallen. Dies ist ebenfalls an den Übertragungsfunktionen der Systeme mit den Referenzeinstellungen deutlich zu erkennen (Bilder 6.2, 6.10). Weiterhin ist in den meisten Fällen eine gute qualitative Übereinstimmung der als relevant bewerteten Parameter zu erkennen. Ein auffälliger Unterschied besteht darin, dass X_{22} als irrelevant eingestuft wird.

In Bild 6.12 sind die Ergebnisse der Rastersuche für alle Ausgangsgrößen als Balkendiagramme dargestellt. Dabei wurde eine Normierung auf die jeweilige maximale Maßzahl vorgenommen, sodass die Verhältnisse adäquat abgebildet werden. Vergleichsweise kleine Standardabweichungen σ der Elementareffekte weisen auf kleine Kopplungseffekte und nicht relevante Nichtlinearitäten hin. Auch hier ist eine qualitative Übereinstimmung mit dem analytischen Modell zu erkennen (Vergleich mit Tabelle 6.3). Für Y_1 bis Y_3 entsprechen die Totaleffekte den Haupteffekten bei der Sensitivitätsanalyse des analytischen Kragbalkenmodells. Dagegen sind für Y_4 bis Y_6 deutlichere Unterschiede vorhanden. Lediglich für Y_7 werden von der Rastersuche des Finite-Elemente-Modells Kopplungsterme für die Variablen X_1 , X_4 und X_5 identifiziert, die vom analytischen Modell nicht wiedergegeben werden. Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse basierend auf einer Metamodellierung der Balkenstruktur vorgestellt und unter anderem diskutiert, ob es sich bei den genannten Unterschieden um Fehler der Rastersuche oder modellbedingte Diskrepanzen handelt.

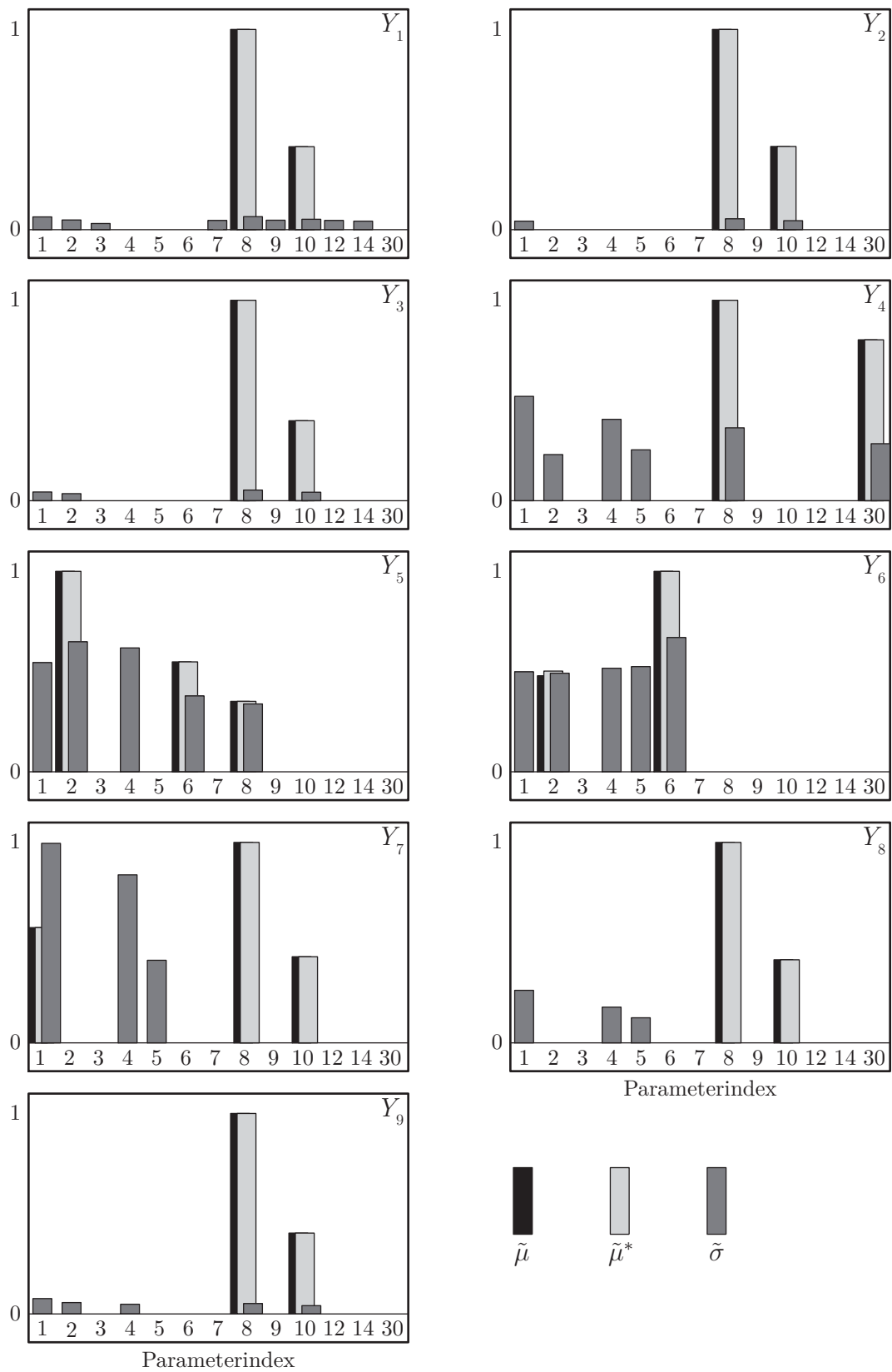


Bild 6.12: Normierte Bewertungsmaße $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}^*$, $\tilde{\sigma}$ des Morris-Screening-Tests

6.2.5 Metamodellierung und Sensitivitätsanalyse

In Abschnitt 6.1.8 wurde eine geeignete Metamodellierungsstrategie des analytischen Kragbalkenmodells vorgestellt. Diese wird für das hier behandelte numerische Modell übernommen. Mit einer mittels Sobol'-Sequenz erstellten Stichprobe der Größe $N = 5000$ wurde mit einer entsprechenden Anzahl an Simulationsläufen des Gesamtmodells die zum Trainieren der neuronalen Netzwerke erforderliche Datenbasis erstellt. Bei den vorhergehenden Untersuchungen stellte sich eine Stichprobengröße ab $N > 3000$ bei mittlerer Anzahl an Neuronen $s = 20, 30$ als ausreichend für eine genaue Approximation des Modellverhaltens heraus. Entsprechend wurden zwecks statistischer Absicherung zehn neuronale Netzwerke mit $N \in \{3000, 3500, 4000, 4500, 5000\}$ und $s \in \{20, 30\}$ gebildet. Dabei wurde für jede betrachtete Ausgangsgröße ein Subnetz in der Form (Bild 3.2, S. 38) implementiert. Anhand der identifizierten Netzwerke wurden die Ausgangsgrößen mit der Stichprobe der statistischen Analyse (Abschnitt 6.1.5) approximiert und die entsprechenden Sensitivitätsmaße mit den Schätzformeln Gln. (3.47), (3.49) berechnet.

Die zugehörigen Ergebnisse sind in Bild 6.13 dargestellt. Zum direkten Vergleich sind die Ergebnisse des analytischen Balkenmodells ebenfalls aufgeführt. Es werden bezüglich der zehn betrachteten Netzwerke die jeweiligen Maxima, Minima und die Mittelwerte der ermittelten Sensitivitätsmaße angezeigt, sodass eine Einschätzung des Streuverhaltens möglich ist. Sind die Differenzen zwischen den Extremwerten groß, so kann dies als ein Hinweis für eine möglicherweise unzureichende Metamodellierung angesehen werden. Dies ist hier jedoch nicht der Fall. Es sind für jede Ausgangsgröße lediglich die Sensitivitätsmaße der als relevant eingestuften Parameter ($S_{H/T} > 0,05$) abgebildet.

Die Beeinflussung und Variabilität der Lage der Eigenfrequenzen Y_1 bis Y_3 des FEM-Modells entspricht dem Verhalten des analytischen Modells sowohl qualitativ als auch quantitativ. Für die Amplituden des aktiven Systems an den Resonanzstellen Y_4 bis Y_6 ergeben sich einige Differenzen. Bei Y_4 wird Variable X_6 vom numerischen Modell als irrelevant eingestuft. Da die zugehörigen Sensitivitätsmaße relativ klein sind, ist dieser Unterschied ebenfalls als gering einzuschätzen. Gleiches gilt für die Parameter X_4 , X_8 , X_{10} bei Y_6 und in umgekehrter Weise für X_1 und X_{17} . Bei der Bewertung von Y_5 ergeben sich qualitative Unterschiede in den Maßen der Variablen X_2 , X_4 und X_6 . Da diese aber von ähnlicher Größenordnung sind, ist auch dieser Unterschied als irrelevant zu bewerten. Für die Lage der Resonanzfrequenzen Y_7 bis Y_9 ergibt sich wiederum eine sehr genaue Übereinstimmung der zwei gegenüber gestellten Modelle. Lediglich der Einfluss von X_{30} bei Y_7 wird vom FEM-Modell nicht in vergleichbarer Form wiedergegeben.

Die Streuung der mittels neuronaler Netzwerke berechneten Sensitivitätsmaße ist relativ klein. Dementsprechend lässt sich schlussfolgern, dass die hier zugrunde gelegte Datenbasis von $N > 3000$ hinreichend für eine gute Approximation des numerischen Gesamtmodells ist. Ein Vergleich mit der zuvor durchgeführten Rastersuche (Bild 6.12)

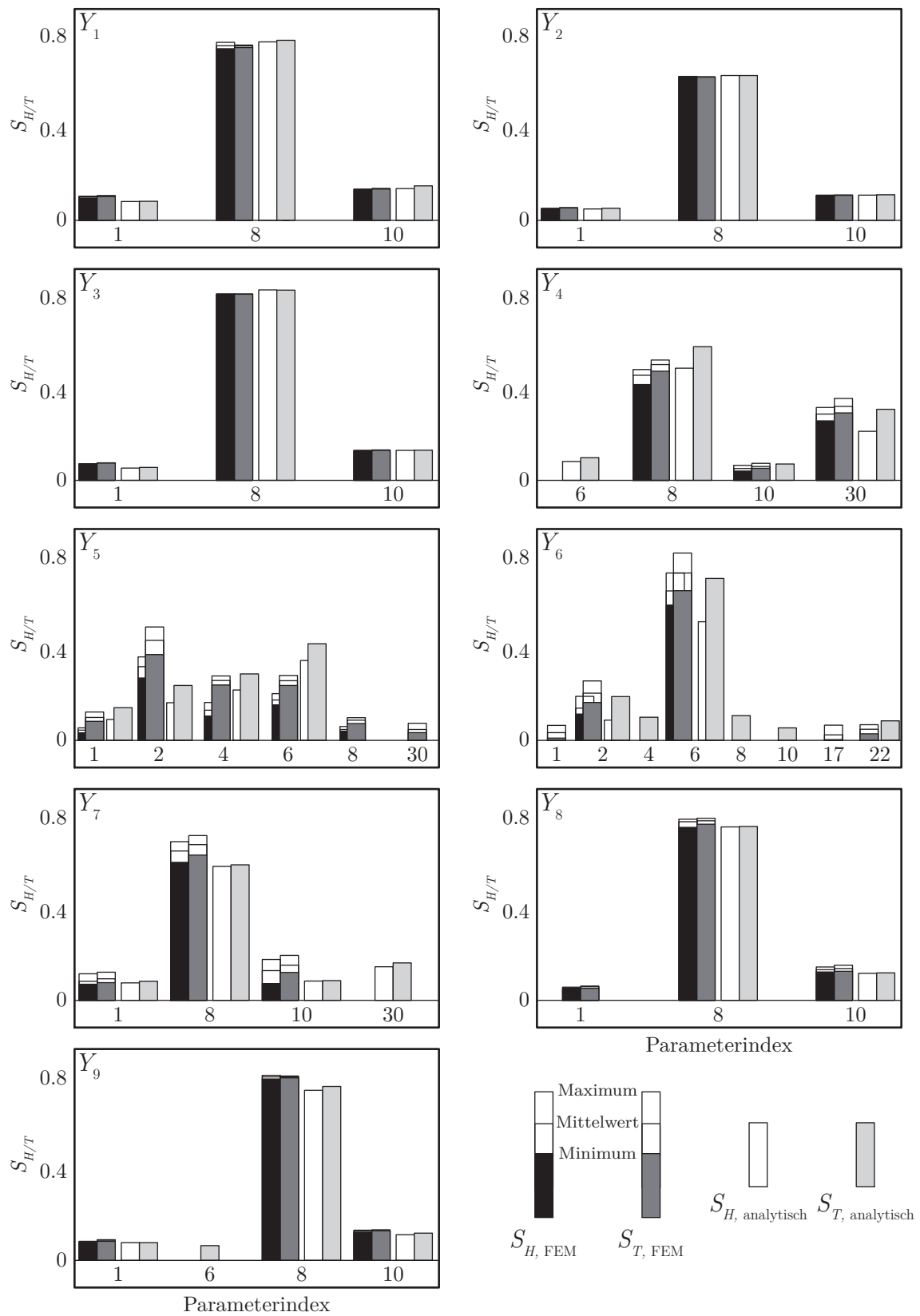


Bild 6.13: Vergleich der Sensitivitätsmaße des FEM Modells mit dem analytischen Modell

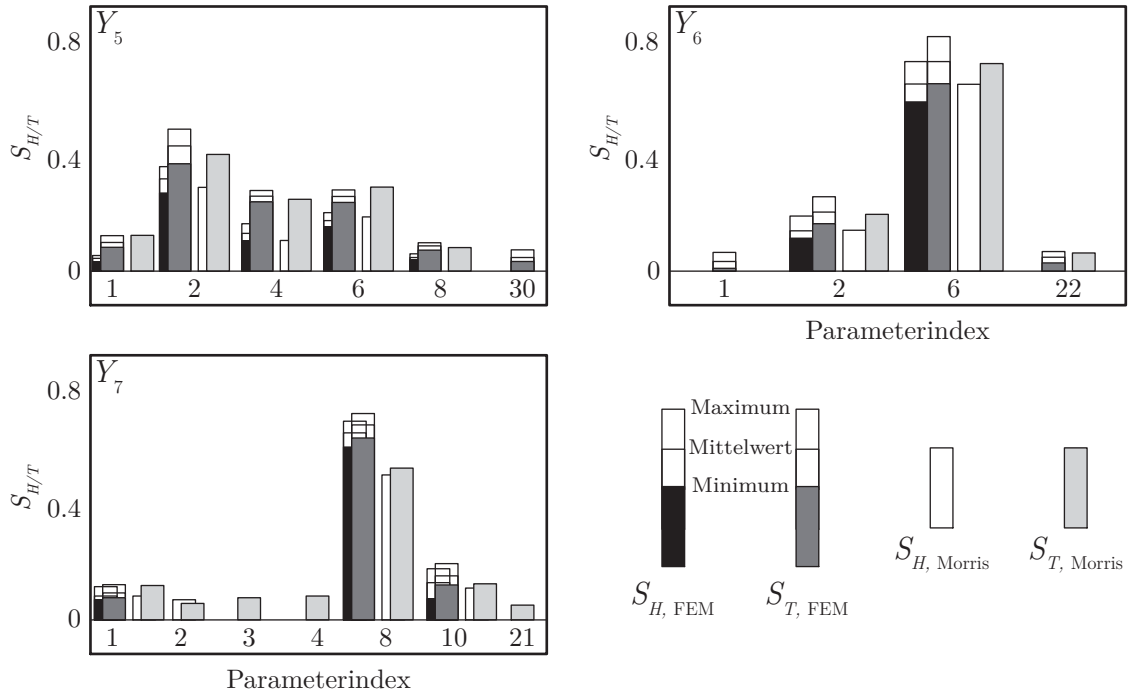


Bild 6.14: Vergleich der Sensitivitätsmaße des neuronalen Netzwerks mit Trainingsdaten aus der Morris-Rastersuche

ergibt größtenteils eine gute Übereinstimmung der relevanten Parameter. Allerdings werden vom Screening-Verfahren im Vergleich zum analytischen Modell viele Typ-II-Fehler (Bewertung von X_3 , X_5 , X_7 , X_9 , X_{12} , X_{14} als signifikant) und zwei Typ-I-Fehler (Bewertung von X_{17} , X_{22} als nicht signifikant) begangen. Dies ist erstaunlich, da zum einen die gleiche Stichprobe der Rastersuche des analytischen Modells und zum anderen eine vergleichsweise konservative Wahl für den Grenzfaktor n_{lim} getroffen wurde. Da den zuletzt genannten Parametern aber lediglich geringe Werte in den Sensitivitätsmaßen zugeordnet werden, sind diese Fehler als unbedeutend anzusehen.

Zusammenfassend ist zu erkennen, dass die Variabilität der betrachteten Ausgangsgrößen bei beiden Modellen im wesentlichen sowohl qualitativ als auch quantitativ von den gleichen Variablen beeinflusst wird. Somit gibt das numerische Modell mit der hier implementierten Metamodellierung und varianzbasierten Sensitivitätsanalyse die Abhängigkeit der Strukturzuverlässigkeit korrekt wider. Im Allgemeinen sind jedoch keine analytischen Modelle für Vergleichszwecke verfügbar, somit ist eine gleichzeitige Durchführung einer Rastersuche trotz der möglichen Typ-I- und Typ-II-Fehler empfehlenswert. Der resultierende Rechenaufwand besteht somit aus etwa 10000 Berechnungen des Simulationsmodells.

Eine offensichtliche Möglichkeit diesen Rechenaufwand um die Hälfte zu reduzieren besteht darin, die für die Rastersuche verwendete Stichprobe und die entsprechenden Simulationsergebnisse als Trainingsdatenbasis für die neuronalen Netze zu verwenden.

Beispielhaft sind in Bild 6.14 die Ergebnisse, gekennzeichnet mit dem Index „Morris“, eines entsprechenden neuronalen Netzwerkes mit $s = 30$ Neuronen dargestellt. Für die nicht abgebildeten Ausgangsgrößen konnte eine exakte Übereinstimmung erzielt werden. Die Sensitivitätsmaße bezüglich der Ausgangsgrößen $Y_5 - Y_7$ stimmen ebenfalls bei Vernachlässigung kleiner Unterschiede überein.

Eine abschließende Beurteilung, ob eine für die Rastersuche verwendete Stichprobe weiterhin als Datenbasis zur Erstellung neuronaler Netze geeignet ist, kann an dieser Stelle trotzdem nicht getroffen werden. Im Allgemeinen verfügt eine derartige Stichprobe über eine schlechtere Diskrepanz (Anhang C) als Quasizufallszahlen. Dies führt zu einer erhöhten Fehleranfälligkeit der ermittelten Metamodelle. Ob diese Fehler in einem akzeptablen Rahmen liegen, hängt vom jeweils betrachteten System und der verwendeten Stichprobe, die an sich wiederum eine Zufallsvariable darstellt, ab. Dennoch ist hiermit eine vielversprechende Möglichkeit gegeben, den Rechenaufwand weiter auf ein praxistaugliches Maß zu reduzieren.

In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, dass mit der Implementierung einer Rastersuche und einer Metamodellierung mit neuronalen Netzwerken komplexe Modelle, hier beispielhaft gezeigt an einem adaptronischen Balkensystem, einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse ohne den Aufwand einer vollständigen statistischen Analyse unterzogen werden können. Es wurde ein rechenintensives numerisches Modell mit einem analytischen Referenzmodell verglichen und hieraus angemessene Einstellungen abgeleitet.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Implementierung varianzbasierter Sensitivitätsanalysen zur Bewertung adaptiver Struktursysteme. Hierbei werden unterschiedliche Verfahren zur Erstellung der Stichproben, Berechnung der Sensitivitätsmaße, Möglichkeiten der Fehlerabschätzung und Reduktion des Rechenaufwands untersucht und die Ergebnisse diskutiert. Anhand von zwei beispielhaften Struktursystemen wird die Implementierung der Verfahren veranschaulicht, wobei zur Strukturmodellierung sowohl analytische als auch numerische Methoden zum Einsatz kommen.

Im Folgenden werden die wesentlichen Ergebnisse, die den wissenschaftlichen Beitrag dieser Arbeit darstellen, abschließend zusammengefasst. Die Darstellung folgt dabei den in Kapitel 1 (S. 2 f.) formulierten Zielsetzungen. Weiterhin wird eine neue mögliche Anwendung im Rahmen einer Optimierungsaufgabe vorgestellt und der verbleibende Forschungsbedarf dargelegt.

7.1 Wesentliche Ergebnisse

1. Zielsetzung: Fehler- und Plausibilitätsbewertung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse

Eine explizite Betrachtung der statistischen Fehler einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse ist aus der Literatur nicht bekannt. Gleichzeitig führt die Abbildung komplexer adaptiver Struktursysteme zu einem hohen Rechenaufwand, sodass die verwendete Datenbasis nicht beliebig durch weitere Simulationen erhöht werden kann. In diesem Kontext ist eine Fehlerabschätzung mittels der vorhandenen Stichprobenergebnisse zwingend erforderlich, um die Plausibilität der Ergebnisse zu überprüfen.

Innerhalb dieser Arbeit wurden einige konventionelle und neue Methoden der Fehlerabschätzung (Tabelle 7.1) implementiert und bewertet. Eine erste offensichtliche Möglichkeit der Fehleranalyse besteht in dem Vergleich der Ergebnisse unterschiedlicher Berechnungsverfahren. Aufgrund des hohen zusätzlichen Rechenaufwands ist dieser Ansatz jedoch im Allgemeinen nicht realisierbar.

Die Angabe von Konfidenzintervallen mit Bootstrap-Resamples ist aus der Literatur bekannt und entspricht dem Stand der Technik. Allerdings ist die Aussagekraft bezüglich einer Fehlerbewertung eingeschränkt. Der Vertrauensbereich hängt von der zugrunde

Generierung von Zufallszahlen	
<ul style="list-style-type: none"> · Pseudozufallszahlen · Latin-Hypercube-Sampling · Quasizufallszahlen 	
Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße	
statistische Verfahren	spektrale Verfahren
<ul style="list-style-type: none"> · Lineare Regression (Haupteffekt) · Sobol'-Schätzer I (Haupteffekt) · Sobol'-Schätzer II (Totaleffekt) · Jansen'-Schätzer (Totaleffekt) 	<ul style="list-style-type: none"> · Random-Balanced-Design (Haupteffekt) · Extended Fourier-Amplitude-Sensitivity-Test (Haupt- und Totaleffekt)
Plausibilitätsbewertung der Sensitivitätsmaße	
konventionelle Verfahren	neue Verfahren
<ul style="list-style-type: none"> · Vergleich unterschiedlicher Berechnungsmethoden · Konfidenzintervalle mit Bootstrap-Resampling 	<ul style="list-style-type: none"> · stochastische Verschiebung · Konvergenzanalyse

Tabelle 7.1: Implementierte Methoden der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse

liegenden Stichprobengröße ab. Mit steigender Anzahl an Stichprobenelementen werden die Vertrauensbereiche kleiner. Vergleicht man die Intervalle verschiedener Sensitivitätsmaße, beispielsweise S_H und S_T der Ausgangsgröße Y_7 in Bild 6.4 (S. 86), so fällt auf, dass bei offensichtlicher Konvergenz der Berechnungen die Breite der Vertrauensbereiche um mehrere Größenordnungen differiert. Somit kann anhand der Breite des Konfidenzintervalls keine Aussage über den Fehler der statistischen Schätzung erfolgen. Für die grundsätzliche Bewertung der Streuung der Ergebnisse ist die Angabe von Vertrauensbereichen jedoch nicht zu ersetzen.

Spektrale Verfahren entziehen sich der Möglichkeit der Angabe von Konfidenzintervallen mit Resamplingverfahren. Dies liegt in dem Aufbau der zugehörigen Stichproben begründet. Zwar wird eine zufallsbasierte Auswahl an Simulationspunkten getroffen, allerdings ist ein Resampling der Stichprobenelemente, woraus bei statistischen Schätzungen die Vertrauensbereiche berechnet werden, nicht sinnvoll. Für vergleichbare Analysen ist ein großer Mehraufwand an Simulationen notwendig.

Eine allgemeingültige Fehlerbewertung mit einer funktionalen stochastischen Verschiebung über die Einführung zusätzlicher Zufallsvariablen ist ebenfalls nicht möglich. In der innerhalb dieser Arbeit umgesetzten Implementierung lässt sich ausgehend von den exakt berechneten Fehlern der Zusatzterme nicht auf die Berechnungsgüte der Sensitivitätsmaße der eigentlichen Systemvariablen schließen (Bild 5.10, S. 68). Der Grund hierfür liegt zum einen in der vorgegebenen stochastischen Unabhängigkeit der Variablen. Zum anderen ist die Form der funktionalen Transformation so zu wählen, dass eine semi-analytische Lösung verfügbar ist und gleichzeitig die Kopplungseffekte des betrachteten Systems adäquat wiedergegeben werden. Eine geeignete Vorgehensweise zur Erfüllung beider Forderungen konnte hier nicht identifiziert werden.

Im Gegensatz dazu hat sich die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Konvergenzbetrachtung (Abschnitt 4.3, S. 44) als ein geeignetes Mittel zur Bewertung der Schätzfehler

erwiesen. Es werden keine zusätzlichen Simulationsdurchläufe benötigt. Gleichzeitig ist der Rechenaufwand zur Bestimmung der Sensitivitätsmaße der benötigten Subsamples zu vernachlässigen. Ein Vorteil des beschriebenen Ansatzes ist, dass eine skalare Bewertungsgröße berechnet werden kann. Dieser als Konvergenzfehler bezeichnete Wert stellt ein Maß für den Schätzfehler bei gegebener Stichprobengröße dar (z. B. Bild 6.3 (S. 85)).¹

Die Konvergenzanalyse kann dabei ohne Einschränkung lediglich für Pseudo- und Quasizufallszahlen durchgeführt werden. Eine Latin-Hypercube-Samplingstrategie hängt direkt von der Anzahl zur Verfügung stehender Simulationen ab. Dies ermöglicht zwar eine gute gleichmäßige Ausfüllung des Werteraums durch die vollständige Stichprobe, allerdings verschlechtert sich die Diskrepanz² bei der Betrachtung von Teilmengen dieses Samplings. Das trifft weder auf Pseudo- noch auf Quasizufallszahlen zu. Da letztere im direkten Vergleich eine kleinere Diskrepanz aufweisen, ist im Kontext einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse und einer Konvergenzbewertung die Verwendung von Quasizufallszahlen zu empfehlen (Tabelle 7.1).

Eine Konvergenzbetrachtung der Ergebnisse spektraler Ansätze (Bild 5.6, S. 59) ist ebenfalls möglich, wurde aber innerhalb dieser Arbeit nicht durchgeführt. Eine Begründung wird im folgenden Abschnitt gegeben.

In kommerziellen Softwareanwendungen, z. B. in LS-OPT [98], ist lediglich die Möglichkeit der Berechnung von Konfidenzintervallen integriert. Es konnte in dieser Arbeit allerdings gezeigt werden, dass eine Konvergenzanalyse ohne wesentlichen Mehraufwand implementiert werden kann und somit eine genauere Bewertung der Berechnungsfehler ermöglicht wird.

2. Zielsetzung: Vergleich unterschiedlicher Verfahren der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse

Aus der Literatur sind entsprechende Vergleiche nur aus wenigen Publikationen [83, 85] bekannt. Als Systeme werden analytische Testfunktionen und ein Beispiel aus der chemischen Kinetik betrachtet. Eine Aussage über die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse wird nicht getroffen. Gleichzeitig beschränken sich die Untersuchungen auf den Einsatz von Sobol'-Sequenzen zur Generierung der Zufallszahlen.

Innerhalb dieser Arbeit wurden anhand des Ein-Masse-Schwinger-Systems (Kapitel 5, S. 49 ff.) unterschiedliche Ansätze der Zufallszahlengenerierung und Berechnung der Sensitivitätsmaße implementiert und ausgewertet. In Tabelle 7.1 sind die berücksichtigten

¹Es wird dabei angenommen, dass der verwendete statistische Schätzer asymptotisch erwartungstreu ist. Dies trifft auf alle in dieser Arbeit implementierten statistischen Methoden zu.

²Die Diskrepanz bewertet die Ausfüllung eines definierten Werteraums durch eine Stichprobe. Allgemein gilt, je kleiner die Diskrepanz einer Stichprobe, desto schneller konvergiert eine statistische Schätzung.

Methoden zusammengefasst aufgeführt. Die im Rahmen dieser Arbeit als geeignet identifizierten Verfahren sind dabei durch Fettschrift hervorgehoben.

Der Einsatz statistischer Schätzverfahren im Vergleich zu spektralen Methoden stellt sich in vielen Beziehungen als vorteilhaft heraus. Zwar sind spektrale Ansätze insbesondere bei der Approximation der Haupteffekte bezüglich des notwendigen Rechenaufwands deutlich effizienter (Bild 5.7, S. 61), allerdings ist hierbei keine Möglichkeit der Angabe von Konfidenzintervallen ohne zusätzliche weitere Simulationsdurchläufe gegeben. Somit wird der vermeintliche Effizienzvorteil nivelliert.

Gleichzeitig werden bei der Existenz vieler kleiner Totaleffekte diese fehlerhaft berechnet (S_T , Y_5 bis Y_8 , Bild 5.6, S. 59). Zwar sind derartige Fehler aufgrund der meist kleinen Sensitivitätsmaße als vernachlässigbar anzusehen, dennoch ist festzuhalten, dass diese durch Anwendung statistischer Schätzverfahren vermieden werden.

Weiterhin ergaben sich für die Ausgangsgrößen Y_1 bis Y_3 (Gl. (5.7), S. 52) des Ein-Masse-Schwingers Fehler in den berechneten Haupteffekten (Bild 5.4, S. 57). Die betrachteten Absolutwerte sind betragsmäßig klein, jedoch ist auch bei steigender Stichprobengröße keine Konvergenz gegen den Wert Null zu beobachten. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass hier die Annahme der asymptotischen Erwartungstreue, eine grundlegende Voraussetzung für die Konvergenzbewertung, nicht erfüllt wird.

Aufgrund der kleinen Absolutwerte sind die Fehler der spektralen Ansätze quantitativ vernachlässigbar. Der betrachtete Ein-Masse-Schwinger stellt aber gleichzeitig ein sehr einfaches dynamisches Struktursystem dar. Eine allgemeine Aussage über die Anwendbarkeit der spektralen Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße kann deshalb in diesem Rahmen nicht getroffen werden. Daher wird für die Analyse komplexerer Zusammenhänge und Systeme der Einsatz statistischer Schätzer empfohlen, da hierbei die beschriebenen Fehler vermieden werden.

Im Vergleich der zwei vorgestellten statistischen Verfahren zur Approximation des Totaleffekts ergibt sich für den von Jansen vorgestellten Schätzer ein deutlich schnelleres Konvergenzverhalten als der Sobol'-Schätzer (Bild 5.8, S. 63). Interessant dabei ist, dass sich die schnellere Konvergenz der Quasizufallszahlen beim Sobol'-Schätzer stärker auswirkt. Dennoch ist auch für den Jansen-Schätzer ein leichter Vorteil bei Verwendung von Sobol'-Sequenzen zu erkennen (Konvergenzfehler ε_H , Y_2 , Bild 5.8).

Wenn die Sensitivitätsanalyse zur Identifikation linearer Zusammenhänge, wiedergegeben durch den Haupteffekt, durchgeführt wird, so eignen sich konventionelle Verfahren der linearen Regression (Bild 5.11, S. 70). Mittels geeigneter Verknüpfung einer Korrelationsanalyse und einer linearen Regression zweiter Ordnung konnte auch eine qualitative Identifikation nichtlinearer Wechselwirkungen erzielt werden (Bild 5.12, S. 71).

Im Kontext der Systemzuverlässigkeit sind jedoch im Allgemeinen quantitative Aussagen erforderlich. Für diese Zwecke ist die Berechnung der Totaleffekte mit dem Jansen-

Schätzer geeignet. In diesem Zusammenhang können die Haupteffekte ohne zusätzlichen Simulationsaufwand anhand der selben Stichprobenergebnisse bestimmt werden.

3. Zielsetzung: Reduzierung des Rechenaufwandes zur Analyse von Modellen adaptronischer Struktursysteme

Ein ungenügendes Approximationsmodell des adaptronischen Struktursystems kann zu weiteren fehlerhaften Ergebnissen einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse führen. In [36] wurde beispielsweise zur Reduzierung des Rechenaufwands mit einem vollfaktoriellen Versuchplan ein Regressionsmodell des aktiven Ölwannensystems erstellt. Das vereinfachte Metamodell wurde den statistischen Schätzungen der Sensitivitätsmaße zugrunde gelegt. Die resultierenden Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse waren allerdings nicht konsistent. Als Ursache wurde eine ungenügende Approximationsgüte des Metamodells vermutet. Dies konnte jedoch bedingt durch den hohen Rechenaufwand des Simulationsmodells der aktiven Ölwanne nicht verifiziert werden.

Die abschließende Zielsetzung dieser Arbeit setzt sich somit aus zwei Aspekten zusammen. Im ersten Schritt sind die anhand des Ein-Masse-Schwinger-Systems gewonnenen Erkenntnisse bezüglich geeigneter Methoden einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse auf die Untersuchung einer adaptronischen Struktur zu übertragen. Dies führt im Allgemeinen zu einer hohen Anzahl an Berechnungen des Simulationsmodells. Daher werden im zweiten Schritt Verfahren zur Reduzierung des Rechenaufwands untersucht.

Als adaptronisches Struktursystem wird ein Kragbalken mit kolloziertem Piezoaktor und -sensor betrachtet (Kapitel 6, S. 75). Die Regelung basiert dabei auf einem Positive-Position-Feedback-Algorithmus. Anhand eines analytischen Modells wird eine vollständige statistische Berechnung der Sensitivitätsmaße durchgeführt. Den Ergebnissen des Ein-Masse-Schwinger-Systems folgend werden Quasizufallszahlen, der Jansen-Schätzer und zur Fehlerbewertung eine Konvergenzanalyse implementiert (Abschnitt 6.1.5 und Abschnitt 6.1.6, S. 83 ff.). Die resultierenden Sensitivitätsmaße werden als Referenzwerte für die folgenden Untersuchungen betrachtet.

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Struktursystemen ergab sich für eine fehlerfreie (Konvergenzfehler $\varepsilon_{H,T} < 0,05$) vollständige statistische Analyse eine notwendige Stichprobengröße von $N = 1000$. Daraus berechnet sich die Anzahl benötigter Simulationen des Modells in Abhängigkeit von der Variablenanzahl k zu $N \cdot (k + 2)$. Es ergibt sich somit bei einer hohen Anzahl an Parametern und bei rechenintensiven Modellen ein sehr großer Rechenaufwand. Beispielsweise werden beim adaptronischen Balkensystem $k = 30$ Variablen berücksichtigt, womit 32000 Berechnungen des Modells benötigt werden.

Zur Reduzierung des Rechenaufwands wurden eine Rastersuche nach der von Morris [70] vorgestellten Methode (Abschnitt 6.1.7, S. 88 ff.) und neuronale Netzwerke zur Metamodellierung (Abschnitt 6.1.8, S. 90 ff.) des Balkensystems implementiert.

Die zum Trainieren der neuronalen Netze benötigte Datenbasis wurde mit einer Stichprobe der Größe $N_{\text{NN}} = 5000$, bestehend aus Sobol'-Sequenzen, und den entsprechenden Simulationsergebnissen erstellt. Anhand der identifizierten neuronalen Netze wurde anschließend eine varianzbasierte Sensitivitätsanalyse mit einer Stichprobengröße von $N_{\text{SA, NN}} = 10000$ durchgeführt. Die zum Trainieren und zur Simulation der neuronalen Netze benötigte zusätzliche Rechenzeit ist in Relation als vernachlässigbar anzusehen.

Ein Vergleich der anhand des Metamodells ermittelten Sensitivitätsmaße mit den Werten der vollständigen statistischen Untersuchung ergab eine sehr gute qualitative und quantitative Übereinstimmung (Bild 6.7, S. 91), sodass diese Vorgehensweise zur Analyse eines numerischen Modells des adaptronischen Balkens übernommen wurde.

Für die Rastersuche wurde ebenfalls eine Stichprobengröße von ca. $N = 5000$ zugrunde gelegt. Die Stichprobe wird hierbei nicht über Zufallszahlen, sondern über die Bestimmung von geeigneten Trajektorien im Parameterraum erstellt. Im Allgemeinen werden derartige Screening-Verfahren zur qualitativen Identifizierung irrelevanter Parameter durchgeführt, sodass in einer nachfolgenden Monte-Carlo-Analyse lediglich die verbleibenden Variablen berücksichtigt werden müssen.

Aufgrund der hohen Approximationsgüte und den kurzen Berechnungszeiten neuronaler Netze wurde in dieser Arbeit allerdings auf eine Reduzierung der Variablenanzahl verzichtet. Die Ergebnisse des Morris-Screenings wurden lediglich zum Vergleich mit den ermittelten Werten der Metamodelle herangezogen. Diese Vorgehensweise ist für den allgemeinen Fall sinnvoll, wenn ein Abgleich der Ergebnisse mit Referenzwerten, beispielsweise über ein analytisches Vergleichsmodell, nicht möglich ist.

Das Finite-Elemente-Modell der Balkenstruktur und die Abbildung des geregelten Gesamtsystems wird in den Abschnitten 6.2.1 bis 6.2.3 (S. 93 ff.) vorgestellt. Die Ergebnisse der Rastersuche (Bild 6.12, S. 100) weichen im direkten Vergleich von denen des analytischen Modells zum Teil ab. Es werden mehr Fehler vom Typ I begangen. Dies ist insofern erstaunlich, da eine konservative Einstellung des Screening-Verfahrens eingesetzt wurde. Da das Morris-Screening hier lediglich für qualitative Vergleichszwecke durchgeführt wird, sind die genannten Differenzen zu vernachlässigen.

Zur Approximation des FEM-Balkenmodells wurden die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes für die implementierten neuronalen Netzwerke übernommen. Anhand der resultierenden Metamodelle der numerischen Abbildung des Balkensystems wurde eine varianzbasierte Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Die berechneten Sensitivitätsmaße stimmen qualitativ und quantitativ sehr gut mit den Ergebnissen der vollständigen statistischen Untersuchung des analytischen Simulationsmodells überein (Bild 6.13, S. 102).

Insgesamt konnte die Anzahl an benötigten Simulationsdurchläufen in Relation zur vollständigen statistischen Analyse auf ein Drittel reduziert werden. Legt man zum Trai-

nieren die Stichprobe der Rastersuche zugrunde, so lassen sich die Rechenkosten nochmals halbieren. Allerdings führte dies im Fall des betrachteten Systems zu einigen kleinen Abweichungen in der Approximation der Sensitivitätsmaße (Bild 6.14, S. 103). Eine Beurteilung, ob diese Fehler im Allgemeinen vernachlässigbar sind, konnte nicht erfolgen.

Zusammenfassend konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass der Einsatz des Morris-Screenings und neuronaler Netze im Kontext einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse zu einer Reduzierung des Rechenaufwands führt. Dabei werden die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse korrekt wiedergegeben, was in der hohen Approximationsgüte der implementierten Metamodellierung begründet liegt.

Im Vergleich zur statistischen Versuchsplanung ist der Rechenaufwand jedoch sehr hoch. Die dabei resultierenden Regressionsmodelle können jedoch das komplexe Systemverhalten adaptiver Strukturen im Allgemeinen nicht global abbilden, sodass der Einsatz der statistischen Versuchsplanung zu falschen Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse führen kann. Demzufolge wird die Verwendung von neuronalen Netzwerken im Zusammenhang mit der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse adaptiver Struktursysteme empfohlen.

7.2 Anwendung in der Strukturoptimierung

Eine vielversprechende Möglichkeit der Anwendung varianzbasierter Sensitivitätsanalysen neben der Bewertung der Strukturzuverlässigkeit wird im Bereich der robusten Optimierung gesehen. Entsprechende Untersuchungen anhand der betrachteten Beispielsysteme wurden allerdings nicht durchgeführt. Diese sollen Bestandteil nachfolgender Arbeiten sein. An dieser Stelle sollen vorab die grundlegenden Zusammenhänge beschrieben werden.

Globale Sensitivitätsanalysen werden oft im Rahmen von Optimierungsaufgaben mit der deterministischen Aufgabenstellung $\text{Min } Y = f(\mathbf{X})$, durchgeführt³ [53, 80]. Das primäre Ziel ist dabei, die Anzahl der Variablen, die berücksichtigt werden müssen, zu reduzieren. Dies kann beispielsweise über Screening-Verfahren [70] oder mit der Durchführung einer aufwändigen Varianzzerlegung (Gl. (3.21)) [53] erfolgen. Nach der Bestimmung der dominanten Einflussgrößen werden die entsprechenden irrelevanten Parameter in den folgenden Optimierungsanalysen nicht mehr variiert. Dabei wird als konstanter Wert in der Regel der Mittelwert oder der Median gewählt.

Wird als Optimierungsaufgabe ein deterministisches Minimum, d. h. ein Minimalwert der betrachteten Ausgangsgröße Y ohne Berücksichtigung der Streuung anderer Para-

³Dies darf nicht mit den in Optimierungsaufgaben oft verwendeten Algorithmen zur Bestimmung von Gradienten verwechselt werden. Diese werden ebenfalls als Sensitivitätsanalyse bezeichnet.

meter, gesucht, so wird die stochastische Problemformulierung nicht konsequent weitergeführt. Einen besseren Ansatz im Sinne der Ermittlung eines robusten Optimums stellt die stochastische Optimierungsaufgabe $\text{Min } \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(f(\mathbf{X}))$ [92] dar, wobei eine geringe Variabilität als Kriterium für die Robustheit gewertet wird. Der Mittelpunkt (oder auch jeder andere Punkt) des somit ermittelten optimalen Bereichs kann bei Bedarf als Startpunkt für einen deterministischen Optimierungsalgorithmus verwendet werden.

Ein Vorteil der Monte-Carlo-basierten Verfahren zur Berechnung der Haupt- und Totaleffekte ist, dass neben den bedingten Varianzen auch die bedingten Erwartungswerte erster Ordnung ohne nennenswerten zusätzlichen Aufwand berechnet werden können. Für den Fall, dass $S_{T_i} - S_{H_i} < S_{H_i}$ (d. h. die Wechselwirkungseffekte des Parameters X_i sind klein oder vernachlässigbar) gilt, kann der oben beschriebene optimale Bereich ohne zusätzliche Simulationsdurchläufe ermittelt werden. Da dieser Aspekt in der Literatur nicht beschrieben wird, werden im Folgenden die hierfür benötigten Schritte erläutert.

1. Berechnung der Sensitivitätsmaße S_{H_i} und S_{T_i} mit der dargestellten Vorgehensweise bei Berücksichtigung des vollständigen Parameterraums Ω^k . Da im Folgeschritt eine Unterteilung in Perzentilbereiche erfolgt, ist ein großer Stichprobenumfang zu wählen. Hierbei wird der Einsatz neuronaler Netzwerke empfohlen, sodass der Rechenaufwand überschaubar bleibt.
2. Einteilung in n Perzentilbereiche. Zur Absicherung der stochastischen Konvergenz wird empfohlen, diese Bereiche bei kleinem Stichprobenumfang groß zu wählen. Somit wird der Parameterraum Ω^k unterteilt in n Unterräume $\tilde{\Omega}_n^k$.
3. Statistische Berechnung von $\mathbb{E}_n(\mathbb{E}(Y|X_i))$ und $\mathbb{E}_n(\text{Var}[Y|X_i])$

Eine erste Möglichkeit zur statistischen Approximation leitet sich aus Gl. (3.37) her und berechnet sich wie folgt

$$\mathbb{E}_n(\mathbb{E}(Y|X_i)) \hat{=}_1 \frac{1}{n_i} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{n_i} f_{\mathbf{B}_{n,r}} \cdot \sum_{r=1}^{n_i} f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)}_{n,r}}} \quad . \quad (7.1)$$

Dabei bezeichnet n_i die zum Parameter X_i gehörige Stichprobengröße im Unterraum $\tilde{\Omega}_n^k$.

Eine zweite Möglichkeit leitet sich aus folgenden Überlegungen ab. Aus der Berechnung von $f_{\mathbf{B},r}$ und $f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r}$ existieren für jeden Unterraum $\tilde{\Omega}_n^k$ und jeden der k Parameter n_i Stichprobenpaare, in denen die Eingangsgröße X_i konstant gehalten wird. Anhand dieser Stichprobenpaare lassen sich demnach n_i Schätzungen für die Größe $\mathbb{E}(Y|X_i)$ berechnen. Mit dem arithmetischen Mittelwert wird wiederum der Erwartungswert dieses Terms approximiert

$$\mathbb{E}_n(\mathbb{E}(Y|X_i)) \hat{=}_2 \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{r=1}^{n_i} \frac{1}{2} \left(f_{\mathbf{B}_{n,r}} + f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)}_{n,r}} \right) \quad . \quad (7.2)$$

Die dabei erwartete Varianz der Ausgangsgröße kann anhand der zusammengesetzten Stichprobe $f_{\mathbf{A}_B^{(i)} \mathbf{B}_n} = \left[f_{\mathbf{A}_B^{(i)} n}; f_{\mathbf{B}_n} \right]^T$ ermittelt werden

$$\mathbb{E}_n(\text{Var}[Y|X_i]) \hat{=} \frac{1}{2n_i - 1} \cdot \sum_{r=1}^{2n_i} \left(f_{\mathbf{A}_B^{(i)} \mathbf{B}_n} - \frac{1}{2n_i} \sum_{r=1}^{2n_i} f_{\mathbf{A}_B^{(i)} \mathbf{B}_n} \right)^2 \quad (7.3)$$

4. Bestimmung der optimalen Perzentilbereiche $\Omega_{i,\min} = \text{Min } \mathbb{E}_n(\mathbb{E}(Y|X_i)) \forall X_i$
5. Wenn $\mathbb{E}_n(\text{Var}[Y|X_i]) < \varepsilon_{\text{Varianz}}$ nicht erfüllt ist, gehe zu 1. mit $\Omega_i = \Omega_{i,\min}$. Dabei stellt $\varepsilon_{\text{Varianz}}$ einen festzulegenden aufgabenspezifischen Grenzwert für die erlaubte Streuung (Varianz) dar.

Diese Vorgehensweise eignet sich beispielsweise zur robusten Optimierung des untersuchten adaptronischen Kragbalkens. Hierbei werden die notwendigen Voraussetzungen $S_{T_i} - S_{H_i} < S_{H_i}$ für alle Variablen und Ausgangsgrößen erfüllt. Von Interesse ist beispielsweise die Frage, inwiefern die identifizierten optimalen Bereiche für alle neun Ausgangsgrößen übereinstimmen. Somit kann eine Aussage über die Robustheit des Optimums getroffen werden, was mittels deterministischer Ansätze nicht möglich ist.

7.3 Bestehender Forschungsbedarf

Trotz der erzielten Reduktion der Rechenkosten stellt der verbleibende notwendige Simulationsaufwand zur Durchführung einer varianzbasierten Sensitivitätsanalyse für viele Anwendungsfälle aus der Strukturmechanik ein großes Hindernis dar. Ein notwendiger Schwerpunkt zukünftiger Arbeiten liegt somit in der Untersuchung und Entwicklung von Methoden zur weiteren Reduzierung des Rechenaufwands. Im Folgenden sollen hierfür einige Ansatzpunkte genannt werden.

Innerhalb dieser Arbeit wurden zur Implementierung von Quasizufallszahlen lediglich Sobol'-Sequenzen verwendet. Aus dem Bereich der Quasi-Monte-Carlo-Simulationen sind allerdings weitere Sequenzarten bekannt. Es gilt zu überprüfen, ob durch die Implementierung alternativer Verfahren zur Generierung der Stichprobe eine Verbesserung der Konvergenz erreicht werden kann.

Am Ende des vorherigen Kapitels wurde gezeigt, dass durch die Verwendung der Stichprobe einer Rastersuche zum Trainieren neuronaler Netzwerke der benötigte Rechenaufwand halbiert werden kann. Allerdings konnte keine Bewertung der entstehenden Abweichungen erfolgen. Gegebenenfalls ist über eine entsprechende Optimierung der Stichprobenerstellung zur Rastersuche eine Vermeidung derartiger Fehler möglich.

Desweiteren ist durch die Vielzahl unterschiedlicher Verfahren zur Erstellung von Metamodellen ein breites Feld an Möglichkeiten gegeben. Von Interesse sind entsprechend

Methoden, die bei geringerer Stichprobengröße eine ähnlich gute Approximationsgüte erzielen wie die in dieser Arbeit implementierten einfachen Netzwerke mit tangentialen sigmoidalen Transferfunktionen. Als mögliche Alternative bieten sich beispielsweise neuronale Netzwerke mit radialen Basisfunktionen an.

Weiterführende grundlegende Untersuchungen können durch die Implementierung momentenfreier Sensitivitätsmaße und eine Gegenüberstellung mit den in dieser Ausarbeitung verwendeten varianzbasierten Maßen erfolgen. Neben der Aussagekraft der Sensitivitätsmaße sollte dabei auch der benötigte Rechenaufwand verglichen werden. Entsprechende globale Sensitivitätsmaße werden beispielsweise in [9, 21, 60] vorgestellt.

Neben den simulationsbasierten Untersuchungen ist eine experimentelle Bewertung der Systemzuverlässigkeit adaptronischer Struktursysteme von großer Bedeutung. Eine Übertragung der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse auf experimentelle Untersuchungen ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich. Im Experiment muss neben der Bewertung einzelner Komponenten auch das komplexe Verhalten des Gesamtsystems abgebildet werden. Dies führt zu aufwändigen und kostenintensiven Prüfständen.

In einer experimentellen Sensitivitätsanalyse einer adaptronischen Struktur kann dabei aufgrund des hohen Aufwands lediglich eine vergleichsweise geringe Anzahl an Variablen berücksichtigt werden. Als Methodik eignet sich die statistische Versuchsplanung. Erste Ergebnisse, die eine gute qualitative Übereinstimmung experimenteller und simulationsbasierter Sensitivitätsanalysen beschreiben, sind in [58] dokumentiert. Die Erweiterung existierender Prüfstände und die Untersuchung aufwändiger Versuchspläne ist Bestandteil aktueller Forschungsarbeiten.

Als letzter Punkt soll an dieser Stelle die Weiterentwicklung des vorgestellten Ansatzes der funktionalen stochastischen Verschiebung genannt werden. Hierbei sind einige grundlegende Fragen zu beantworten. Zum einen gilt es, das Verbesserungspotenzial durch Verwendung anderer Transformationsbeziehungen zu untersuchen. Zum anderen wird eine allgemein einsetzbare Systematik zur Identifizierung systemspezifisch geeigneter Erweiterungsfunktionen benötigt.

A Globale Sensitivitätsanalyse

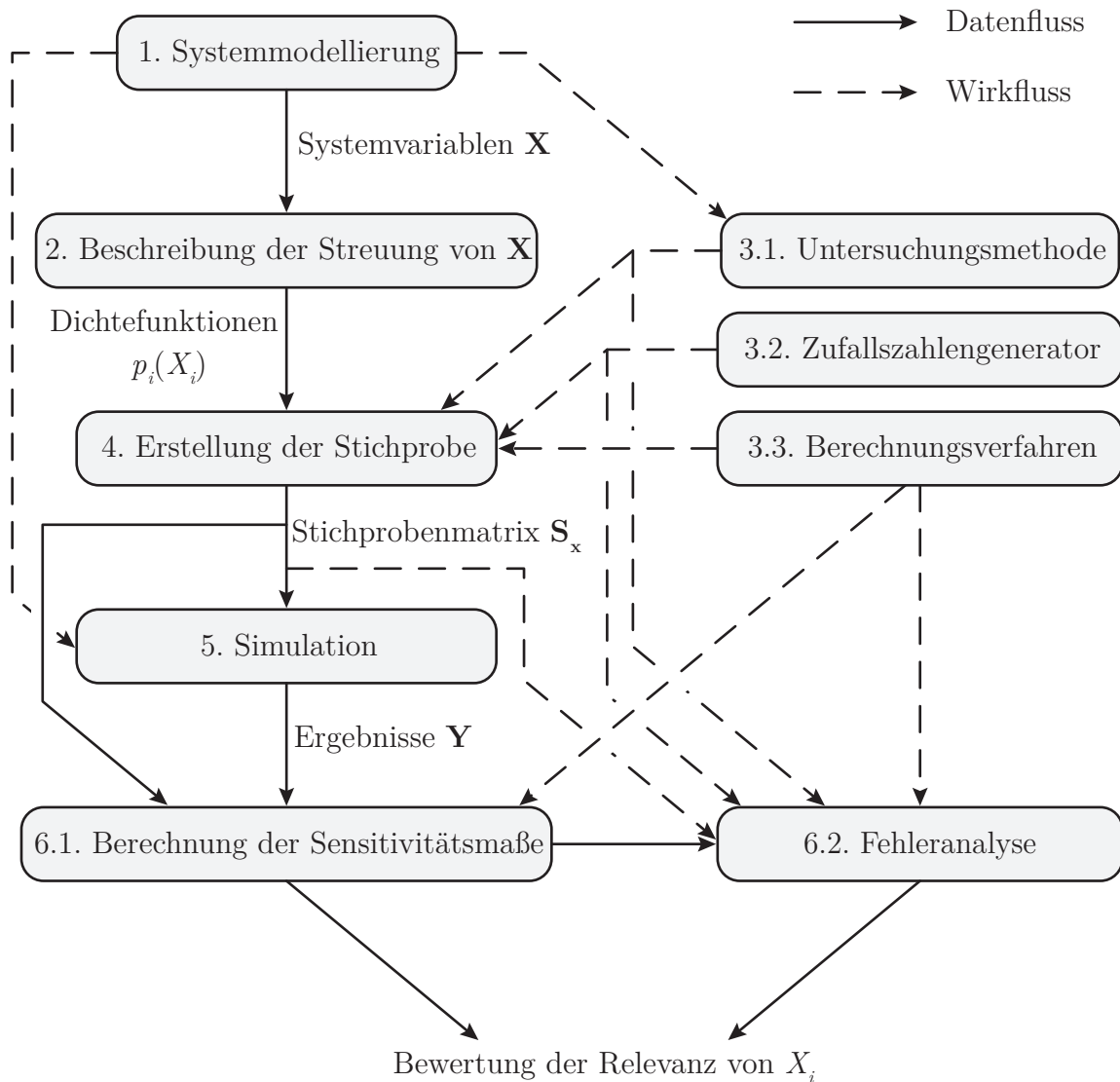


Bild A.1: Ablaufplan einer globalen Sensitivitätsanalyse

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise einer globalen Sensitivitätsanalyse erläutert. Gleichzeitig werden verwendete Fachbegriffe (hervorgehoben durch Fettschrift) im Kontext erläutert. Der allgemeine Ablauf ist in Bild A.1 skizziert. Eine Sensitivitätsanalyse bewertet im Allgemeinen den Einfluss von **Eingangsgrößen**¹ $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]^T$

¹Als äquivalente Begriffe werden auch die Ausdrücke **Variable** und **Parameter** verwendet.

auf die betrachteten **Ausgangsgrößen** $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]^T$. Der Ausdruck **global** bezeichnet dabei Verfahren, die im Gegensatz zu **lokalen** Ansätzen den gesamten Wertebereich von \mathbf{X} und \mathbf{Y} zur Berechnung von skalaren **Bewertungsmaßen** (auch **Sensitivitätsmaße** genannt) berücksichtigen.

A.1 Systemmodellierung

Der erste Schritt einer Sensitivitätsanalyse besteht in der Modellierung des untersuchten Systems. Im Kontext dieser Arbeit sind damit lediglich mathematische Simulationsmodelle gemeint. Eine Übertragung der Systematik auf experimentelle Arbeiten ist prinzipiell möglich, jedoch kommen hier andere Methoden (Abschnitt A.3.1) zum Einsatz.

Das Simulationsmodell bildet das Untersuchungsobjekt einer Sensitivitätsanalyse. Die Güte der Ergebnisse hängt somit von der Aussagekraft des Modells ab. Neben dem Simulationsmodell werden dabei die Variablen \mathbf{X} und die **Antwortgrößen** \mathbf{Y} festgelegt.

Beispiel:

Es wird die Ishigami-Testfunktion [51] mit $k = 3$ Variablen $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ untersucht. Das mathematische Modell ist durch

$$f(\mathbf{X}) = \sin(X_1) + 7 \cdot \sin^2(X_2) + 0,1 \cdot X_3^4 \cdot \sin(X_1) \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Als Ausgangsgröße $Y = f(\mathbf{X})$ wird der Funktionswert betrachtet.

A.2 Beschreibung der Streuung

Als Zweites wird die **stochastische Charakterisierung** des **Streuverhaltens** der einzelnen Variablen durchgeführt. Dies erfolgt durch Zuweisung von **Dichtefunktionen** $p_i(X_i)$. Damit werden die charakteristischen Merkmale der Streuung festgelegt. Die **Mittelage** wird durch den **Erwartungswert** (Gl. (3.4)) beschrieben. Die **Varianz** (Gl. (3.7)) stellt ein Maß für die **Spannweite (Breite)** der Streuung dar.

In dieser Arbeit werden lediglich zwei **Verteilungsarten**, die **Gleich-** und die **Normalverteilung** betrachtet. Die Gleichverteilung wird durch die Dichtefunktion

$$p_U(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

mit den **Verteilungsparametern** a, b definiert. Die Dichtefunktion einer Normalverteilung lautet

$$p_N(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (\text{A.3})$$

mit den Parametern μ und σ . Wenn eine Zufallsvariable X_i gleichverteilt ist, wird dies mit $X_i \sim \mathcal{U}(a; b)$ symbolisiert. Eine normalverteilte Variable X_j wird mit $X_j \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ gekennzeichnet.

Durch die Zuweisung von Dichtefunktionen wird gleichzeitig der **Parameterraum**, das heißt der Raum aller möglichen **Variablenwerte**, definiert. Dieser Raum wird auch **Grundgesamtheit** genannt.

Beispiel:

X_1, X_2, X_3 seien gleichverteilt, mit $a = -\pi$ und $b = \pi$

$$X_1 \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi) \quad , \quad X_2 \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi) \quad , \quad X_3 \sim \mathcal{U}(-\pi; \pi) \quad . \quad (\text{A.4})$$

Die Grundgesamtheit ist durch einen Hyperkubus Ω^3 mit einer Kantenlänge von 2π und einem Volumen von $8\pi^3$ gegeben.

Die Aussagekraft einer Sensitivitätsanalyse hängt von der Güte der Beschreibung des Streuverhaltens ab. Entsprechend ist die stochastische Charakterisierung der Variablen sorgfältig durchzuführen.

A.3 Auswahl der Methodik

Sowohl die Modellierung als auch die Beschreibung des Streuverhaltens sind, unabhängig von der Methodik der Sensitivitätsanalyse, spezifisch für das untersuchte System durchzuführen. Sind diese zwei ersten Arbeitsschritte erfolgt, schließt sich die Wahl der Methode der Sensitivitätsanalyse an.

A.3.1 Untersuchungsmethode

Die Wahl der Analysemethode wird hauptsächlich durch das verfolgte Ziel der Untersuchungen, das Simulationsmodell und die betrachteten Systemgrößen bedingt. Für Ausgangsvariablen, die sich durch eine Linearkombination der Eingangsparameter gut approximieren lassen, sind konventionelle Verfahren wie die **Korrelations-** und **Regressionsanalyse** hinreichend geeignet.

Bei komplexeren nichtlinearen Zusammenhängen ist die Auswahl angemessener Verfahren eingeschränkt. Eine adäquate Methode stellt die **varianzbasierte** Sensitivitätsanalyse dar. Es werden dabei zwei **Sensitivitätsmaße** berechnet. Der **Haupteffekt** S_H (Gl. (3.27)) bewertet die lineare Auswirkung einer Variablen und ist somit vergleichbar mit den konventionellen Verfahren. Der **Totaleffekt** S_T (Gl. (3.28)) fasst die gesamten

nichtlinearen Einflüsse zusammen. Über diese Bewertungsmaße erfolgt eine **quantitative** Beurteilung der Eingangsvariablen.

Ist man lediglich an einer **qualitativen** Bewertung, beispielsweise in Form der Gruppierung in **relevante** und **irrelevante** Parameter, interessiert, stellt eine **Rastersuche** einen geeigneten Ansatz dar. Ein Verfahren der Rastersuche ist das **Morris-Screening**, welches in dieser Arbeit eingesetzt wird. Die zugehörigen Bewertungsmaße setzen sich aus **Elementareffekten** (Gl. (3.63)) zusammen. Als Elementareffekt wird der resultierende **Gradient** der Ausgangsgröße bei Veränderung einer einzelnen Variable bezeichnet. Daher wird das Morris-Screening auch als ein **One-At-a-Time (OAT)** Verfahren bezeichnet.

A.3.2 Zufallszahlengenerator

Bei jeder gewählten Untersuchungsmethode muss zur Erstellung der benötigten Daten aus der Grundgesamtheit eine Auswahl an **Kombinationen** der **Variablenwerte**, auch **Realisationen** genannt, getroffen werden. Sind im Text Realisationen der Variablen gemeint, werden diese durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_k]^T$. Die getroffene Auswahl an Wertekombinationen wird als **Stichprobe** oder **Sample** bezeichnet und besteht aus einer **Stichprobenmatrix** $\mathbf{S}_{\mathbf{x},(N \times k)}$. Die Zeilenanzahl N der Matrix gibt die **Stichprobengröße** wieder. Eine einzelne Wertekombination, eine Zeile der Matrix $\mathbf{S}_{\mathbf{x},(N \times k)}$, wird **Stichprobenelement** genannt.

Die erstellte Stichprobe soll im Allgemeinen den vorgegebenen Parameterraum optimal ausfüllen. Zur Auswahl der Realisationen bieten sich **Zufallszahlen** an. Der Vorgang des Auswählens wird als **Stichprobenerstellung** oder **Sampling** bezeichnet. Die Güte der Ausfüllung der Grundgesamtheit durch eine Stichprobe wird mit der **Diskrepanz** bewertet.

Prinzipiell existieren drei unterschiedliche Ansätze zur **Generierung** von Zufallszahlen. Generatoren für **Pseudo-** und **Quasizufallszahlen** und **Latin-Hypercube-Sampling**-Methoden. Der geläufige englische Begriff für Quasizufallszahlen lautet **Low-Discrepancy-Sequence**. Daher wird im entsprechenden Kontext der Begriff **Sequenz** ebenfalls verwendet. In Kapitel C werden die drei genannten Ansätze näher beschrieben.

Der Begriff **Monte-Carlo-Simulation** fasst in diesem Kontext Verfahren zusammen, die auf der Berechnung großer Stichproben bestehend aus Zufallszahlen basieren. Ein Simulationslauf wird dabei als **Zufallsexperiment** bezeichnet.

A.3.3 Berechnungsverfahren

Gegebenenfalls kann die Berechnung der betrachteten Sensitivitätsmaße über verschiedene Ansätze erfolgen. Beispielsweise lässt sich der Totaleffekt einer varianzbasierten

Sensitivitätsanalyse mit zwei unterschiedlichen **statistischen Schätzverfahren**, dem Sobol'-**Schätzer** (Gl. (3.48)) und dem Jansen-Schätzer (Gl. (3.49)), bestimmen. Ein **spektrales** Verfahren zur Berechnung des Totaleffekts bildet die ExFAST-Methode (Gl. (3.60)). Das gewählte Berechnungsverfahren wirkt sich dabei auf die Zusammenstellung der Stichprobe aus.

Beispiel:

Als Untersuchungsmethode wird eine varianzbasierte Sensitivitätsanalyse gewählt. Die Stichprobenerstellung erfolgt mit Sobol'-Sequenzen. Der Haupteffekt soll mit dem statistischen Schätzer Gl. (3.47)

$$\hat{S}_{H_i} = \frac{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{r=1}^N f_{\mathbf{B},r} \cdot \left[f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} - f_{\mathbf{A},r} \right]}{\frac{1}{2N-1} \cdot \sum_{r=1}^{2N} \left(f_{\mathbf{AB},r} - \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{2N} f_{\mathbf{AB},r} \right)^2} \quad (\text{A.5})$$

und der Totaleffekt mit dem Jansen-Schätzer Gl. (3.49)

$$\hat{S}_{T_i} = \frac{\frac{1}{2N} \sum_{r=1}^N \left(f_{\mathbf{A},r} - f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(i)},r} \right)^2}{\frac{1}{2N-1} \cdot \sum_{r=1}^{2N} \left(f_{\mathbf{AB},r} - \frac{1}{2N} \sum_{r=1}^{2N} f_{\mathbf{AB},r} \right)^2} \quad (\text{A.6})$$

berechnet werden.

Die hierfür benötigte Zusammenstellung der Stichprobe wird in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Es wird von zwei separaten Stichprobenmatrizen ausgegangen

$$\mathbf{A}_{N \times k} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & x_{N,3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{N \times k} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,1} & \tilde{x}_{1,2} & \tilde{x}_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{N,1} & \tilde{x}_{N,2} & \tilde{x}_{N,3} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Durch die Vertauschung von Spalten werden die weiteren benötigten Stichprobenmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{N,1} & x_{N,2} & x_{N,3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \tilde{x}_{1,2} & x_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N,1} & \tilde{x}_{N,2} & x_{N,3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(3)} &= \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \tilde{x}_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N,1} & x_{N,2} & \tilde{x}_{N,3} \end{pmatrix} \text{ konstruiert.} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$f_{\mathbf{AB},r}$ bezeichnet das Funktionsergebnis des Stichprobenelements, welches durch die r -te Zeile der Matrix $\mathbf{AB} = [\mathbf{A}; \mathbf{B}]$ definiert wird. Zur Berechnung der varianzbasierten Sensitivitätsmaße sind $N \cdot (3 + 2)$ Modellberechnungen notwendig.

A.4 Erstellung der Stichprobe

Die Vorgehensweise der Stichprobenerstellung wird durch die Wahl der Untersuchungsmethode und der Berechnungsverfahren bestimmt. Zufallszahlengeneratoren erzeugen im Allgemeinen Zahlenwerte zwischen 0 und 1 aus dem **Einheitshyperkubus** Ω^k . Der Hyperkubus bezeichnet den Parameterraum, der von k gleichverteilten Variablen mit $b = 1$ und $a = 0$ aufgespannt wird. Die Berechnung der tatsächlichen Variablenwerte erfolgt, indem die generierten Zufallszahlen als **Quantilwerte** betrachtet werden. Ein **p -Quantil** ist ein Lagemaß der Verteilung einer Variablen. Links vom p -Quantil liegen $100 \cdot p\%$ der Zufallswerte. Demzufolge liegen rechts vom p -Quantil $(100 \cdot (1 - p)\%)$ aller Beobachtungswerte.

Die tatsächlichen Variablenwerte werden anhand der Quantile und der **Inversion** der **Verteilungsfunktionen** bestimmt. Die Verteilungsfunktion, auch **Wahrscheinlichkeitsfunktion** genannt, erhält man als Integral über die Dichtefunktion

$$\mathcal{F}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} p(X) dx \quad . \quad (\text{A.9})$$

Die Inverse der Gleichverteilungsfunktion lautet

$$\bar{x} = \mathcal{F}^{-1}(\bar{x}) = \mathcal{F}(\bar{x}) \cdot (b - a) + a \quad , \quad (\text{A.10})$$

wobei der konstante Anteil aus der Bedingung $\int_{-\infty}^{\bar{x}=a} p_u(X) dx = 0$ resultiert.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Normalverteilung lässt sich im Gegensatz dazu nicht auf eine Stammfunktion zurückführen. Daher sind die Werte tabellarisch nachzuschlagen. In MATLAB erfolgt dies automatisiert mit dem Befehl `norminv`.

Beispiel:

Es wird mit Sobol'-Sequenzen eine Quantilmatrix mit $2 \cdot k = 6$ Spalten und $N = 1000$ Reihen generiert.

Zeile	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75
3	0,75	0,25	0,75	0,25	0,75	0,25
4	0,125	0,625	0,875	0,875	0,625	0,125
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
999	0,9053	0,2236	0,2568	0,3994	0,2920	0,4541
1000	0,0928	0,1611	0,8193	0,7119	0,9795	0,0166

Quantile der Stichprobenmatrix **A**
Quantile der Stichprobenmatrix **B**

Mit den ersten drei Spalten der Quantilmatrix und der inversen Wahrscheinlichkeitsfunktion Gl. (A.10) lässt sich die Stichprobenmatrix \mathbf{A} berechnen. Analog dazu wird \mathbf{B} mit den verbleibenden drei Spalten der Quantilmatrix generiert

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1,5708 & 1,5708 & -1,5708 \\ 1,5708 & -1,5708 & 1,5708 \\ -2,3562 & 0,7854 & 2,3562 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2,5464 & -1,7365 & -1,5278 \\ -2,5587 & -2,1292 & 2,0064 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,5708 & -1,5708 & 1,5708 \\ -1,5708 & 1,5708 & -1,5708 \\ 2,3562 & 0,7854 & -2,3562 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0,6320 & -1,3070 & -0,2884 \\ 1,3315 & 3,0127 & -3,0373 \end{pmatrix}.$$

Damit lassen sich die weiteren Stichprobenmatrizen bestimmen

$$\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,5708 & 1,5708 & -1,5708 \\ -1,5708 & -1,5708 & 1,5708 \\ 2,3562 & 0,7854 & 2,3562 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0,6320 & -1,7365 & -1,5278 \\ 1,3315 & -2,1292 & 2,0064 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1,5708 & -1,5708 & -1,5708 \\ 1,5708 & 1,5708 & 1,5708 \\ -2,3562 & 0,7854 & 2,3562 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2,5464 & -1,3070 & -1,5278 \\ -2,5587 & 3,0127 & 2,0064 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1,5708 & 1,5708 & 1,5708 \\ 1,5708 & -1,5708 & -1,5708 \\ -2,3562 & 0,7854 & -2,3562 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2,5464 & -1,7365 & -0,2884 \\ -2,5587 & -2,1292 & -3,0374 \end{pmatrix}.$$

Die gesamte Stichprobenmatrix setzt sich somit aus den einzelnen Matrizen $\mathbf{S}_{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(1)}; \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(2)}; \mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(3)}]$ zusammen und besteht aus $5 \cdot 1000$ Zeilen und 3 Spalten.

A.5 Simulation

Die **Stichprobenmatrix** $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$ fasst alle Wertekombinationen der Variablen zusammen. Zur Berechnung der Ausgangsgrößen $\mathbf{Y} = f(\mathbf{S}_{\mathbf{x}})$ werden dabei die einzelnen Zeilen dem untersuchten Simulationsmodell übergeben.

Beispiel:

Für die Ishigami-Testfunktion ergeben sich die Simulationsergebnisse

$$f_{\mathbf{A}} = f(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,3912 \\ 8,6088 \\ 0,6135 \\ \vdots \\ 7,6758 \\ 3,5926 \end{pmatrix}, \quad f_{\mathbf{B}} = f(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8,6088 \\ 5,3912 \\ 6,3865 \\ \vdots \\ 5,9327 \\ 9,3548 \end{pmatrix},$$

$$f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(1)}} = f(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8,6088 \\ 5,3912 \\ 6,3865 \\ \vdots \\ 5,8970 \\ 7,5812 \end{pmatrix}, \quad f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(2)}} = f(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,3912 \\ 8,6088 \\ 0,6135 \\ \vdots \\ 7,3901 \\ -1,3270 \end{pmatrix}, \quad f_{\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(3)}} = f(\mathbf{A}_{\mathbf{B}}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,3912 \\ 8,6088 \\ 0,6135 \\ \vdots \\ 7,3707 \\ -0,1998 \end{pmatrix}.$$

A.6 Sensitivitätsanalyse

A.6.1 Berechnung der Sensitivitätsmaße

Im Anschluss an die Simulationen wird die eigentliche Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Zuerst werden die betrachteten Sensitivitätsmaße berechnet. Das Vorgehen wird dabei von den ausgewählten Methoden (Abschnitt A.3) bestimmt.

Beispiel:

Für das Beispielsystem wurde in Abschnitt A.3 ein statistischer Ansatz zur Berechnung der Sensitivitätsmaße gewählt. Die Schätzfunktionen für die Haupt- und Totaleffekte sind in Gln. (A.5), (A.6) angegeben. Es ergeben sich bei der implementierten Stichprobengröße von $N = 1000$ folgende Schätzwerte:

	X_1	X_2	X_3
Haupteffekt S_H	0,3157	0,4451	-0,0201
exakter Wert	0,3139	0,4424	0
Totaleffekt S_T	0,5566	0,4396	0,2458
exakter Wert	0,5576	0,4424	0,2437

A.6.2 Fehleranalyse

Als abschließender Schritt erfolgt eine Bewertung der **Approximationsfehler**. Dies wird in der bekannten Literatur vernachlässigt, nimmt jedoch in der Anwendung der

Methoden insbesondere bei komplexen Simulationsmodellen eine zentrale Rolle ein. Die in dieser Arbeit verfolgten Ansätze der Fehlerapproximation werden in Kapitel 4 erläutert.

Es werden dabei drei Fehlerarten unterschieden. Als **Typ-I-Fehler** wird die Bewertung einer irrelevanten Variable als einflussreich bezeichnet. Die falsche Einschätzung eines wichtigen Parameters als irrelevant wird entsprechend **Typ-II-Fehler** genannt. Weiterhin kann eine fehlerhafte Beschreibung des Streuverhaltens zu falschen Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse führen. Dieser Sachverhalt wird **Typ-III-Fehler** genannt.

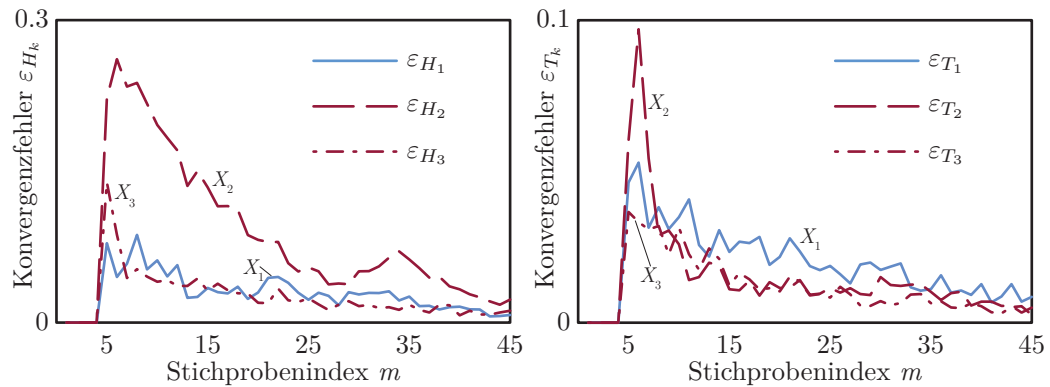
Beispiel:

An dieser Stelle soll der in dieser Arbeit entwickelte Ansatz zur Bewertung der **stochastischen Konvergenz** (S. 44) anhand des untersuchten Testsystems anschaulich dargestellt werden.

1. Es werden $m = 45$ **Subsamples** erstellt. Die zugehörigen Stichprobengrößen sind $N_1 = 100, N_2 = 120, \dots, N_{45} = 980$.
2. Für alle Subsamples müssen die Sensitivitätsmaße berechnet werden. Hier wirkt sich die Verwendung von Quasizufallszahlen in der Stichprobenerstellung vorteilhaft aus. Mit den eingesetzten Sobol'-Sequenzen wird für jede Stichprobengröße eine optimale Ausfüllung des Parameterraums erreicht. Das bedeutet, dass zur Berechnung der Sensitivitätsmaße eines Subsamples der Größe N_m keine erneuten Simulationsdurchläufe notwendig sind, da die Ergebnisse der ursprünglichen Stichprobe $N = 1000$ in Form der ersten N_m Zeilen wieder verwendet werden können.

Stichprobengröße	X_1		X_2		X_3	
	S_H	S_T	S_H	S_T	S_H	S_T
$N_1 = 100$	0,3661	0,5505	0,2845	0,5487	-0,1383	0,2600
$N_2 = 120$	0,2963	0,6129	0,2845	0,5302	-0,1516	0,2797
$N_3 = 140$	0,3212	0,5785	0,2954	0,5069	-0,0228	0,2783
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$N_{25} = 580$	0,3294	0,5629	0,4612	0,4408	-0,0164	0,2435
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$N_{44} = 960$	0,3133	0,5595	0,4605	0,4405	-0,0185	0,2444
$N_{45} = 980$	0,3143	0,5622	0,4504	0,4421	-0,0087	0,2469

Beispiel:



3. Die Konvergenzfehler lassen sich mit den Formeln Gl. (4.4) (S. 44) bestimmen und sind in der folgenden Grafik sowohl für den Haupt- als auch für den Totaleffekt dargestellt. Ein skalares Bewertungsmaß ergibt sich aus der Summe der Konvergenzfehler bei gegebener Stichprobengröße. An dieser Stelle wird jedoch auf eine entsprechende Berechnung verzichtet.

Ab einer Stichprobengröße von $N = 580$ (Index 25) wird der Konvergenzfehler klein. Für die statistische Berechnung der varianzbasierten Sensitivitätsmaße der Ishigami-Testfunktion ist somit eine Stichprobengröße von etwa $N = 600$ notwendig.

B Analytische Berechnung varianzbasierter Sensitivitätsmaße

B.1 Sobol'-G-Funktion

Die Sobol'-G-Funktion stellt eine in der Literatur oft verwendete Testfunktion dar und wird zur Validierung neuer Methoden der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse eingesetzt [3, 85]. Sie wird durch die Gleichungen

$$f(\mathbf{X}) = G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) = G(X_1, X_2, \dots, X_k, a_1, a_2, \dots, a_k) = \prod_{i=1}^k g_i(X_i, a_i) \quad (\text{B.1})$$

$$\text{mit} \quad g_i(X_i, a_i) = \frac{|4 \cdot X_i - 2| + a_i}{1 + a_i}, \quad a_i \geq 0 \quad \text{und} \quad X_i \sim \mathcal{U}(0; 1) \quad (\text{B.2})$$

beschrieben. Diese Testfunktion ist nichtmonoton und nichtlinear, gleichzeitig ist eine analytische Berechnung der Haupt- und Totaleffekte möglich. Der Einfluss einzelner Parameter auf die Systemantwort G lässt sich über die zu definierenden Koeffizienten a_i einstellen.

$a_i = 0$	$\Rightarrow 0 \leq g_i(X_i, a_i) \leq 2$	$\Rightarrow X_i$ wichtig
$a_i = 9$	$\Rightarrow 0,9 \leq g_i(X_i, a_i) \leq 1,1$	$\Rightarrow X_i$ weniger wichtig
$a_i = 99$	$\Rightarrow 0,99 \leq g_i(X_i, a_i) \leq 1,01$	$\Rightarrow X_i$ nicht wichtig

B.2 Analytische Berechnung

Anhand der beschriebenen Sobol'-G-Funktion wird im Folgenden exemplarisch mit $k = 3$ die analytische Berechnung der Haupt- und Totaleffekte (Gln. (3.27), (3.28)) durchgeführt. Im ersten Schritt wird Gl. (B.1) in eine HDMR-Darstellung (Gl. (3.14)) überführt. Die einzelnen Terme f_0, f_i, f_{ij} werden anhand (Gln. (3.16b) bis (3.19)) berechnet, f_{123} resultiert aus der Definition der HDMR-Darstellung.

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \prod_{m=1}^k p_m(X_m) \, dx_1 \dots dx_k \\
 \text{mit } k &= 3 \quad \text{und} \quad p_m(X_m) = \begin{cases} \frac{1}{1-0}, & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\frac{|4 \cdot X_1 - 2| + a_1}{1 + a_1} \cdot \frac{|4 \cdot X_2 - 2| + a_2}{1 + a_2} \cdot \frac{|4 \cdot X_3 - 2| + a_3}{1 + a_3}}_{=G(\mathbf{X}, \mathbf{a})} \, dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) | X_1) - \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a})) = \int_0^1 \int_0^1 G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) \, dx_2 dx_3 - f_0 \\
 &= \frac{|4 \cdot X_1 - 2| - 1}{1 + a_1}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$f_2 = \frac{|4 \cdot X_2 - 2| - 1}{1 + a_2}, \quad f_3 = \frac{|4 \cdot X_3 - 2| - 1}{1 + a_3} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) | X_1, X_2) - \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) | X_1) - \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) | X_2) + \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a})) \\
 &= \mathbb{E}(G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) | X_1, X_2) - f_1 - f_2 - f_0 = \int_0^1 G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) \, dx_3 - f_1 - f_2 - f_0 \\
 &= \frac{(|4 \cdot X_1 - 2| - 1) \cdot (|4 \cdot X_2 - 2| - 1)}{(1 + a_1) \cdot (1 + a_2)}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$f_{13} = \frac{(|4 \cdot X_1 - 2| - 1) \cdot (|4 \cdot X_3 - 2| - 1)}{(1 + a_1) \cdot (1 + a_3)} \tag{B.7}$$

$$f_{23} = \frac{(|4 \cdot X_2 - 2| - 1) \cdot (|4 \cdot X_3 - 2| - 1)}{(1 + a_2) \cdot (1 + a_3)} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
 f_{123} &= G(\mathbf{X}, \mathbf{a}) - f_0 - f_1 - f_2 - f_3 - f_{12} - f_{13} - f_{23} \\
 &= \frac{(|4 \cdot X_1 - 2| - 1) \cdot (|4 \cdot X_2 - 2| - 1) \cdot (|4 \cdot X_3 - 2| - 1)}{(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot (1 + a_3)}
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Mit der berechneten HDMR-Zerlegung und den Ausdrücken $f_1, f_2, f_3, f_{12}, \dots$ lässt sich nun die ANOVA-HDMR (Gl. (3.21)) von $G(\mathbf{X}, \mathbf{a})$ ableiten. Zur Berechnung der einzelnen Terme werden die Gleichungen (3.22) bis (3.25c) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|X_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2 \cdot p_1(X_1) \, dx_1 = \int_0^1 f_1^2 \, dx_1 \\
 &= \frac{1}{3 \cdot (1 + a_1)^2}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$V_2 = \frac{1}{3 \cdot (1 + a_2)^2}, \quad V_3 = \frac{1}{3 \cdot (1 + a_3)^2} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
 V_{12} &= \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|X_1, X_2)] - V_1 - V_2 = \int_0^1 \int_0^1 f_{12}^2 \, dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{9 \cdot (1 + a_1)^2 \cdot (1 + a_2)^2}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$V_{13} = \frac{1}{9 \cdot (1 + a_1)^2 \cdot (1 + a_3)^2}, \quad V_{23} = \frac{1}{9 \cdot (1 + a_2)^2 \cdot (1 + a_3)^2} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
 V_{123} &= \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|X_1, X_2, X_3)] - V_{12} - V_{13} - V_{23} - V_1 - V_2 - V_3 \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_{123}^2 \, dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{27 \cdot (1 + a_1)^2 \cdot (1 + a_2)^2 \cdot (1 + a_3)^2}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Nach der Normierung mit

$$V = \mathbb{V}\text{ar} [G(\mathbf{X}, \mathbf{a})] = V_1 + V_2 + V_3 + V_{12} + V_{13} + V_{23} + V_{123} \tag{B.15}$$

lassen sich schließlich die Sensitivitätsterme S_i, S_{ij}, \dots (Gl. (3.26)) und die Haupt- und Totaleffekte (Gln. (3.27), (3.28)) berechnen

$$S_{H_1} = \frac{\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|x_1)]}{\mathbb{V}\text{ar} [G(\mathbf{X}, \mathbf{a})]} = \frac{V_1}{V}, \quad S_{H_2} = \frac{V_2}{V}, \quad S_{H_3} = \frac{V_3}{V}, \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
 S_{T_1} &= 1 - \frac{\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|\mathbf{X}_{-1})]}{\mathbb{V}\text{ar} [G(\mathbf{X}, \mathbf{a})]} = \frac{V_1 + V_{12} + V_{13} + V_{123}}{V}, \\
 S_{T_2} &= \frac{V_2 + V_{12} + V_{23} + V_{123}}{V}, \quad S_{T_3} = \frac{V_3 + V_{13} + V_{23} + V_{123}}{V}.
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Für die Koeffizienten $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,2$; $a_3 = 1,5$ ergeben sich die analytisch berechneten Sensitivitätsmaße zu

$$S_{H_1} = 0,42; \quad S_{H_2} = 0,35; \quad S_{H_3} = 0,08; \tag{B.18}$$

$$S_{T_1} = 0,55; \quad S_{T_2} = 0,48; \quad S_{T_3} = 0,13. \tag{B.19}$$

Für eine beliebige Anzahl k an Faktortermen $g_i(X_i, a_i)$ lassen sich die Haupt- und Totaleffekte durch folgende verallgemeinerte Gleichungen bestimmen

$$V_i = \mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|X_i)] = \frac{1}{3 \cdot (1 + a_i)^2} , \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbb{V}\text{ar} [\mathbb{E} (G(\mathbf{X}, \mathbf{a})|X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_s})] = -1 + \prod_{j=1}^s (1 + V_{i_j}) , \quad (\text{B.21})$$

$$V_{T_i} = V_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k V_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, j \neq l}}^k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i, l \neq j}}^k V_{ijl} + \dots + V_{12\dots k} = V_i \cdot \prod_{i \neq j} (1 + V_j) , \quad (\text{B.22})$$

$$V = -1 + \prod_{i=1}^k (1 + V_i) . \quad (\text{B.23})$$

C Monte-Carlo-Sampling

Wesentlicher Bestandteil einer Monte-Carlo-Simulation ist die Erstellung der zugrunde liegenden Stichprobe (Sample). Hierbei genügt es, die Generierung von Zufallszahlen im Einheitshyperkubus der Dimension k , entsprechend einer Gleichverteilung $\mathcal{U}^k(0; 1)$, zu betrachten, da von dieser auf beliebig verteilte Zufallszahlen über die Inverse der zugehörigen Dichtefunktion geschlossen werden kann. In dieser Arbeit werden lediglich Verteilungen berücksichtigt, deren zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion entsprechend invertierbar sind.

Die Generierung dieser sogenannten Monte-Carlo-Stichproben wird seit den 1950er Jahren bis heute intensiv erforscht [110]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden drei unterschiedliche Verfahren implementiert, die im Folgenden anschaulich beschrieben werden. Für eine grundlegende mathematische Erläuterung wird auf entsprechende Literatur verwiesen. Zusätzlich werden die verwendeten MATLAB-Befehle genannt. N bezeichnet weiterhin die Größe der Stichprobe.

C.1 Pseudozufallszahlen

Ein Generator für Pseudozufallszahlen erstellt diese über einen deterministischen Algorithmus. Die Zahlenwerte der Stichprobe hängen somit von einem vorzugebenden Anfangswert (Seed) ab. Jeder Algorithmus zur Erstellung von Pseudozufallszahlen verfügt über eine Periodizität, die somit als Gütekriterium für die Qualität der Abbildung eines stochastischen Prozesses verwendet werden kann. Implementiert wurde der sogenannte Mersenne-Twister-Algorithmus [66], der sich unter anderem durch eine sehr hohe Periodenlänge auszeichnet und in MATLAB als Standardalgorithmus für Pseudozufallszahlen eingesetzt wird.

Eine zufallsbasierte Auswahl an Stichpunkten aus einer derartigen Stichprobe (Resample) und die Auswahl einer kleineren Stichprobe (Subsample) kann hierbei ebenfalls über Pseudozufallszahlen erfolgen. Es ist zu erwarten, dass die Diskrepanz (s. Abschnitt B.4.) von gleicher Größenordnung ist. Das heißt, die Güte der Stichprobe wird durch ein Resampling oder Subsampling nicht beeinträchtigt.

```
rand('twister',seed#);Xpseudo = rand(N,k);
```

C.2 Latin-Hypercube-Sampling

Eine Stichprobe mittels Latin-Hypercube-Sampling wird erstellt, indem alle k Zufallsvariablen in N Intervalle gleicher Wahrscheinlichkeit eingeteilt werden. Für den Fall $k = 2$ ergeben sich N Reihen und Spalten. Per Pseudozufallszahlengenerator werden die Werte der Stichprobe ermittelt, wobei kein Intervall (für $k = 2$ keine Reihe und keine Spalte) n mal belegt wird, solange nicht jedes andere Intervall mindestens $n - 1$ mal besetzt ist. Somit werden Clustering-Effekte vermieden. Diese Vorgehensweise wurde erstmals in [67] vorgestellt. Eine einfache Verbesserung im Sinne der optimierten Ausfüllung des Hyperkubus stellt die hier implementierte iterative Methode dar, indem mehrere Latin-Hypercube-Stichproben erstellt werden und diejenige mit dem Maximum der minimalen Distanz zwischen zwei einzelnen Punkten verwendet wird.

Aufgrund der Abhängigkeit von der vorgegebenen Stichprobengröße N ist eine Erhöhung der Diskrepanz bei einem Resampling und Subsampling zu erwarten. Dies kann sich in Form von ungenauen Konvergenzuntersuchungen und Konfidenzintervallen auswirken.

```
Xlhs = lhsdesign(N,k,'criterion','maximin');
```

C.3 Quasizufallszahlen

Quasizufallszahlen (low discrepancy sequences) werden im eigentlichen Sinne nicht zufällig erstellt, sondern werden aus deterministischen Zahlensequenzen entnommen. Diese hängen lediglich von der Dimension k des Hyperkubus, also von der Anzahl an Zufallsvariablen, ab. Die Zahlenfolgen werden derart konstruiert, dass die entstehende Stichprobe möglichst gleichförmig den Raum des Hyperkubus ausfüllt. Zur Erstellung dieser Sequenzen wurden sehr viele Ansätze vorgestellt, wobei die hier implementierte Sobol'-Sequenz [93] in der Literatur zum Thema Sensitivitätsanalyse dominiert.

Ein Subsample der Größe N_{sub} wird hier anhand der ersten N_{sub} Einträge aus der ursprünglichen Stichprobe generiert. Somit wird gewährleistet, dass auch das Subsample den Raum optimal ausfüllt. Bei einem Resample werden die einzelnen Einträge mit Pseudozufallszahlen ausgewählt. Dies führt zu einer Verschlechterung der Diskrepanz und kann sich bei der Bestimmung von Konfidenzintervallen negativ auswirken.

```
Set = sobolset(k); Xsobol = net(Set,N+1); Xsobol = Xsobol(2:end,:);
```

C.4 Diskrepanz als Gütekriterium einer Stichprobe

Zur Bewertung der Güte einer Stichprobe wird in der Literatur vornehmlich die Diskrepanz D [108] als skalares Maß verwendet. Diese ist durch den folgenden Ausdruck

definiert

$$D_N = \sup_{B \in \Omega^k} \left| \frac{A(B)}{N} - \lambda_k(B) \right| . \quad (\text{C.1})$$

Hierbei bezeichnet $A(B)$ die Anzahl aller Punkte, die in den Bereich B , einem beliebigen Teilbereich des Hyperkubus Ω^k , fallen. $\lambda_k(B)$ stellt das Lebesgue-Maß dar. Im Falle des Einheitshyperkubus berechnet sich dieses einfach aus dem Produkt der einzelnen Parameterwerte $\prod_{i=1}^k X_{i,B}$. Für den zweidimensionalen Fall $k = 2$ ist eine einfache anschauliche Herleitung möglich. Ein beliebiges Rechteck B wird durch eine Stichprobe gut dargestellt, wenn die Anzahl an Punkten geteilt durch die Stichprobengröße N der aufgespannten Fläche entspricht. Es soll also gelten $\frac{A(B)}{N} \approx X_{1,B} \cdot X_{2,B}$. Somit stellt die Diskrepanz ein Maß für die Gleichförmigkeit einer Stichprobe dar. Anhand dieser Formulierung Gl. (C.1) lassen sich auch andere Fehlermaße wie die relative Diskrepanz oder der Erwartungswert der Diskrepanz angeben. Zur Berechnung wurde ein eigenes Skript geschrieben.

`d = discrepancy(X);`

C.5 Vergleich verschiedener Samplingtechniken

Zum Vergleich der drei beschriebenen Verfahren zur Erstellung einer Monte-Carlo-Stichprobe wurden für die Dimension $k = 2$ Stichprobengrößen von $N = 20, 100, 500, 1000$ gewählt und die zugehörige Diskrepanz ausgerechnet. Die Ergebnisse sind in Bild C.1 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Sobol'-Sequenz für alle Stichprobengrößen überlegen zu sein scheint. Zu beachten gilt hierbei, dass für Quasizufallszahlen bei gegebener Stichprobengröße immer die gleiche Diskrepanz vorherrscht. Im Falle von Pseudozufallszahlen und dem Latin-Hypercube-Sampling stellt die Diskrepanz selbst eine stochastische Variable dar.

Schon ab $N = 100$ ist ersichtlich, dass sich im Falle von Pseudozufallszahlen und Latin-Hypercube-Sampling relativ große Bereiche ohne Stichprobenpunkte ausbilden. Dagegen ergibt sich bei Quasizufallszahlen ein Muster, welches den aufgespannten Raum dicht abdeckt.

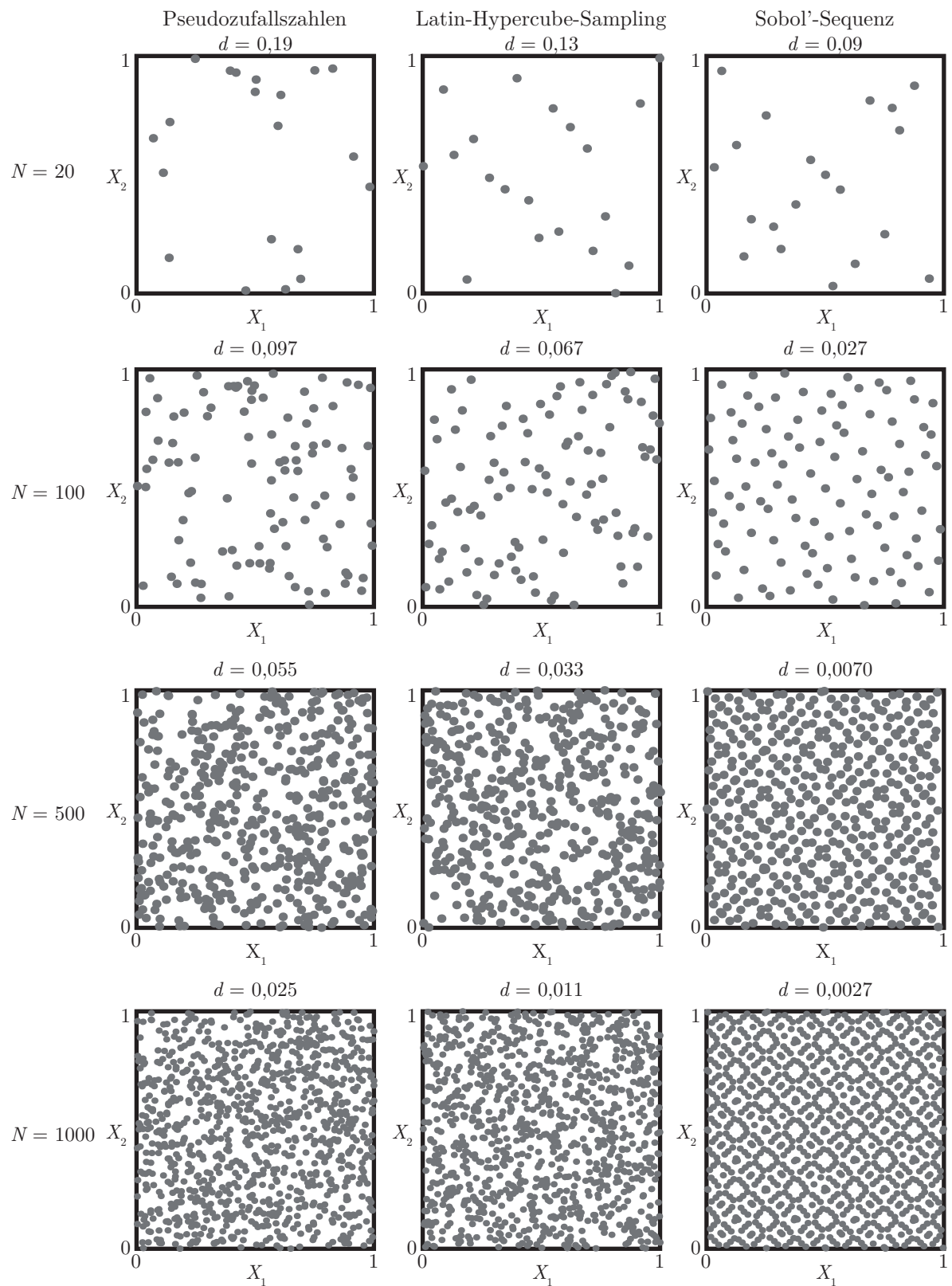


Bild C.1: Vergleich verschiedener Samplingverfahren und der zugehörigen Diskrepanz d

D Beispiel Bootstrap-Resampling

Als einfaches Beispiel zur Methode des Bootstrap-Resamplings wird die Funktion $f(X) = X^2$ mit $X \sim \mathcal{U}(0; 3)$ betrachtet. Als Maß soll $\Theta = \mathbb{E}(f(X)) = 3$ approximiert werden. Als Schätzfunktion wird der arithmetische Mittelwert $\hat{\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X = x_i)$ verwendet. Es ergibt sich für eine Stichprobengröße $N = 10$ eine Sobol'-Sequenz x_S (Tabelle D.1). Aus dieser werden über die Inverse der Wahrscheinlichkeitsfunktion die Stichprobenwerte x_i ermittelt. Die Funktionswerte $f(X = x_i)$ lassen sich entsprechend berechnen. Weiterhin sind zwei Bootstrap-Resamples dargestellt, wobei die einzelnen Elemente mit den Indizes i der Originalstichprobe gekennzeichnet sind.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_S	0,5	0,25	0,75	0,125	0,625	0,375	0,875	0,0625	0,5625	0,3125
$x_i = F^{-1}(x_S)$	1,5	0,75	2,25	0,375	1,875	1,125	2,625	0,1875	1,6875	0,9375
$f(X = x_i)$	2,25	0,5625	5,0625	0,1406	3,5156	1,2656	6,8906	0,0352	2,8477	0,8789
$i_{B=1}$	2	8	4	6	2	7	3	7	7	8
$x_{B=1,i}$	x_2	x_8	x_4	x_6	x_2	x_7	x_3	x_7	x_7	x_8
$i_{B=2}$	5	1	3	10	2	9	6	10	1	5
$x_{B=2,i}$	x_5	x_1	x_3	x_{10}	x_2	x_9	x_6	x_{10}	x_1	x_5

Tabelle D.1: Stichproben- und Funktionswerte, Bootstrap-Resamples

Es ergibt sich $\hat{\Theta} = 2,3449$ und für die Bootstrap-Resamples $\hat{\Theta}_{B=1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X = x_{B=1,i}) = 2,8336$ und $\hat{\Theta}_{B=2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X = x_{B=2,i}) = 2,3027$. Wird ein hinreichend großer Stichprobenumfang N und eine große Anzahl B an Wiederholungen gewählt, so lassen sich anhand der Resamples Konfidenzintervalle und statistische Fehlermaße berechnen. Dies wird in Abschnitt 4.2 (S. 42) erläutert.

Abkürzungsverzeichnis

ANOVA	A nalysis of V ariance
CAE	C omputer A ided E ngineering
DoE	D esign of E xperiments
ExFAST	E xtended F ourier A mplitude S ensitivity T est
FAST	F ourier A mplitude S ensitivity T est
FEM	F inite E lement M ethod
FORM	F irst O rders R eliability M ethod
HDMR	H igh D imensional M odel R epresentation
MPC	M ultiple P oints C onstraints
OAT	O ne A t a T ime
PPF	P ositive P osition F eedback
RBD	R andom B alance D esign
SORM	S econd O rders R eliability M ethod
SRK	S tandardisierte R egressionskoeffizienten

Bilderverzeichnis

2.1	Klassifizierung der Methoden der Zuverlässigkeitstechnik	8
3.1	Gitter für einen Morris-Screening-Test	36
3.2	Aufbau eines Feed-Forward neuronalen Netzes mit einem versteckten Layer	38
3.3	Lineare und tangentielle sigmoidale Transferfunktionen	39
5.1	Fußpunkterregter Ein-Masse-Schwinger	49
5.2	Statistische Schätzung der Haupt- und Totaleffekte für Y_1 bis Y_4	54
5.3	Statistische Schätzung der Haupt- und Totaleffekte für Y_5 bis Y_8	55
5.4	Absoluter Fehler der ExFAST-Approximationen der Haupt- und Totaleffekte für Y_1, Y_2 und X_4, X_6, X_9	57
5.5	Schätzung der Haupt- und Totaleffekte mit der ExFAST-Methode ($m = 8$, keine Wiederholungen) für Y_1 bis Y_4	58
5.6	Schätzung der Haupt- und Totaleffekte mit der ExFAST-Methode ($m = 8$, keine Wiederholungen) für Y_5 bis Y_8	59
5.7	Schätzung der Haupteffekte mit der RBD-Methode ($m = 8$, keine Wiederholungen) für Y_1 bis Y_8	61
5.8	Konvergenzfehler ε_H und ε_T für Y_2, Y_5, Y_7 und Y_8 in Abhängigkeit von der Stichprobengröße mit unterschiedlichen Samplingmethoden und Schätzverfahren für den Totaleffekt	63
5.9	Relevante Sensitivitätsmaße mit 95 %-Konfidenzintervall	65
5.10	Statistisch geschätzte Sensitivitätsmaße, absolute und relative Fehler . .	68
5.11	Haupt- und Totaleffekte, standardisierte Regressionskoeffizienten	70
5.12	Totaleffekte und Koeffizienten einer Regressionsanalyse 2. Ordnung . . .	71
6.1	Kragbalken mit piezoelektrischem Patchaktor und -sensor	75
6.2	Übertragungsfunktion Kraftanregung - Beschleunigung am Balkenende .	82
6.3	Konvergenzfehler	85
6.4	Relevante Sensitivitätsmaße mit 95 %-Konfidenzbereichen	86
6.5	Statistisch geschätzte Sensitivitätsmaße, absolute und relative Fehler . .	87
6.6	Identifikation irrelevanter Variablen mit dem Morris-Screening-Test . . .	88
6.7	Fehleranalyse der Metamodellierung mit neuronalen Netzwerken	91
6.8	3D-Finite-Elemente-Modell des Kragbalkens mit 2409 Freiheitsgraden . .	93

6.9	Ausschnitt der Balkenunterseite an der Sensorposition	94
6.10	Übertragungsfunktionen des analytischen, FEM- und reduzierten aktiven und passiven Modells	97
6.11	Identifikation irrelevanter Variablen des FEM-Modells mit einem Morris- Screening	98
6.12	Normierte Bewertungsmaße $\tilde{\mu}$, $\tilde{\mu}^*$, $\tilde{\sigma}$ des Morris-Screening-Tests	100
6.13	Vergleich der Sensitivitätsmaße des FEM Modells mit dem analytischen Modell	102
6.14	Vergleich der Sensitivitätsmaße des neuronalen Netzwerks mit Trainings- daten aus der Morris-Rastersuche	103
A.1	Ablaufplan einer globalen Sensitivitätsanalyse	115
C.1	Vergleich verschiedener Samplingverfahren und der zugehörigen Diskre- panz d	132

Tabellenverzeichnis

5.1	Eingangsparameter und zugehörige Dichtefunktionen	52
5.2	Analytisch berechnete Haupt- und Totaleffekte für Y_1, Y_2, Y_3	53
5.3	Absolute Fehler $\varepsilon_{S_{H/T}}$ für Y_1 und X_4, X_6	56
5.4	Semianalytisch berechnete Haupt- und Totaleffekte der zusätzlichen Variablen für Ausgangsvariable Y_8	67
6.1	Struktur- und Materialparameter des Piezobalkens	76
6.2	Parameter der PPF-Regelungsstrategie	81
6.3	Haupt- und Totaleffekte der adaptronischen Balkenstruktur	83
6.4	Maximale Grenzfaktoren zur Vermeidung von Typ-II-Fehlern und Anzahl identifizierter relevanter Variablen	89
6.5	Werte und Rangfolge der Sensitivitätsmaße bezüglich Y_6 , ermittelt anhand eines neuronalen Netzwerkes mit $s = 20, N = 3000$	92
6.6	Vergleich der Eigenfrequenzen	97
6.7	Filterkreisfrequenzen für das FEM-Modell	98
7.1	Implementierte Methoden der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse . . .	106
D.1	Stichproben- und Funktionswerte, Bootstrap-Resamples	133

Literaturverzeichnis

- [1] Alzahrani, B.A.; Alghamdi, A.A.A.: Review of the mechanics of materials models for one-dimensional surface-bonded piezoelectric actuators, *Smart Materials and Structures*, 12(3):N1–N4, 2003.
- [2] Ansys Inc. Release 11.0 SP1 Documentation: *Advanced Analysis Techniques Guide: Chapter 3. Probabilistic Design*.
- [3] Archer, G.E.B.; Saltelli, A.; Sobol', I.M.: Sensitivity measures, Anova-like techniques and the use of bootstrap, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 58(2):99–120, 1997.
- [4] Arnoldi, W.E.: The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem, *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 9:17–29, 1951.
- [5] Bai, Z.: Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems, *Applied Numerical Mathematics*, 43(1-2):9–44, 2002.
- [6] Bailey, T.; Hubbard, J.E.J.: Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 8(5):605–611, 1985.
- [7] Bertsche, B.; Lechner, G.: *Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau*, Springer, 2004, 3. Auflage.
- [8] Birolini, A.: *Reliability Engineering*, Springer, 2007, 5. Auflage.
- [9] Borgonovo, E.: A new uncertainty importance measure, *Reliability Engineering & System Safety*, 92(6):771–784, 2007.
- [10] Box, G.E.P.; Hunter, J.S.; Hunter, W.G.: *Statistics for Experimenters - Design, Innovation, and Discovery*, John Wiley & Sons, 2005, 2. Auflage.
- [11] Bring, J.: How to Standardize Regression Coefficients, *The American Statistician*, 48(3):209–213, 1994.
- [12] Cacuci, D.G.: Sensitivity theory for nonlinear systems: I. Nonlinear functional analysis approach, *Journal of Mathematical Physics*, 22(12):2794–2802, 1981.
- [13] Cacuci, D.G.: Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses, *Journal of Mathematical Physics*, 22(12):2803–2812, 1981.
- [14] Campolongo, F.; Cariboni, J.; Saltelli, A.: An effective screening design for sensitivity analysis of large models, *Environmental Modelling and Software*, 22:1509–1518, 2007.
- [15] Chaudhry, Z.; Rogers, C.: The Pin-Force Model Revisited, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5(3):347–354, 1994.
- [16] Chee, C.Y.K.; Tong, L.; Steven, G.P.: A Review on the Modelling of Piezoelectric Sensors and Actuators Incorporated in Intelligent Structures, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9(1):3–19, 1998.

- [17] Chernick, M.R.: *Bootstrap Methods: A Guide for Practitioners and Researchers*, John Wiley & Sons, 2008, 2. Auflage.
- [18] Choi, K.K.; Kim, N.H.: *Structural Sensitivity Analysis and Optimization: Linear Systems*, Band 1, Springer, 2004.
- [19] Choi, K.K.; Kim, N.H.: *Structural Sensitivity Analysis and Optimization: Nonlinear Systems and Applications*, Band 2, Springer, 2005.
- [20] Chowdhury, R.; Rao, B.: Hybrid High Dimensional Model Representation for Reliability Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5-8):753–765, 2009.
- [21] Chun, M.H.; Han, S.J.; Tak, N.I.: An uncertainty importance measure using a distance metric for the change in a cumulative distribution function, *Reliability Engineering & System Safety*, 70(3):313–321, 2000.
- [22] Crawley, E.F.; Anderson, E.H.: Detailed Models of Piezoceramic Actuation of Beams, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(1):4–25, 1990.
- [23] Crawley, E.F.; de Luis, J.: Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures, *AIAA Journal*, 25(10):1373–1385, 1987.
- [24] Cukier, R.I.; Fortuin, C.M.; Shuler, K.E.; Petschek, A.G.; Schaibly, J.H.: Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I Theory, *The Journal of Chemical Physics*, 59(8):3873–3878, 1973.
- [25] Cukier, R.I.; Levine, H.B.; Shuler, K.E.: Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems, *Journal of Computational Physics*, 26(1):1–42, 1978.
- [26] Cukier, R.I.; Schaibly, J.H.; Shuler, K.E.: Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. III. Analysis of the approximations, *The Journal of Chemical Physics*, 63(3):1140–1149, 1975.
- [27] Demuth, H.; Beale, M.; Hagan, M.: *Neural Network Toolbox 6 User's Guide*, The MathWorks, 2008.
- [28] Efron, B.: Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26, 1979.
- [29] Fernandez, J.M.; Perriard, Y.: Sensitivity analysis and optimization of a standing wave ultrasonic linear motor, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 53(7):1352–1361, 2006.
- [30] Frecker, M.I.: Recent Advances in Optimization of Smart Structures and Actuators, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 14(4-5):207–216, 2003.
- [31] Freund, R.W.: Model reduction methods based on Krylov subspaces, *Acta Numerica*, 12:267–319, 2003.
- [32] Gellert, V.R.: *Die Monte Carlo Methode Technik - Probabilistische Berechnung der Frequenzlage einer Verdichterschaukel mittels Monte Carlo Simulation*, VDM Verlag Dr. Müller, 2008.
- [33] Goh, C.J.; Caughey, T.K.: On the stability problem caused by finite actuator dynamics in the collocated control of large space structures, *International Journal of Control*, 41(3):787–802, 1985.

-
- [34] Haftka, R.T.; Adelman, H.M.: Recent developments in structural sensitivity analysis, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1(3):137–151, 1989.
- [35] Hagedorn, P.: *Technische Schwingungslehre - Band 2 - Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*, Springer, 1989.
- [36] Han, S.O.; Wolf, K.: Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse: Ein Beitrag zur Bewertung der Systemzuverlässigkeit adaptiver Strukturen, 2. DVM Tagung AK Zuverlässigkeit mechatronischer und adaptronischer Systeme, 902, S. 71–80, 2008.
- [37] Han, S.O.; Wolf, K.; Hanselka, H.: Reliability Analysis of a Smart Structure System considering the Dependence on Parameter Uncertainties, *Proceedings of 2nd International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, S. 222–231, 2009.
- [38] Han, S.O.; Wolf, K.; Hanselka, H.: Sensitivitätsbewertung adaptronischer Systeme bezüglich streuender Konstruktions- und Umgebungsparameter, *VDI-Berichte 20656*, S. 145–155, VDI-Verlag, 2009.
- [39] Han, S.O.; Wolf, K.; Hanselka, H.; Bein, T.: Design and Analysis of an Adaptive Vibration Isolation System considering Large Scale Parameter Variations, *Proceedings of SPIE Vol. 7288, 7288-84*, 2009.
- [40] Hanselka, H.; Breitbach, E.; Bein, T.; Krajenski, V.: *Grundwissen des Ingenieurs*, Kapitel Mechatronik / Adaptronik, S. 1019–1060, Fachbuchverlag Leipzig, 2007.
- [41] Harzheim, L.: *Strukturoptimierung*, Harri Deutsch, Frankfurt, 2008.
- [42] Hassan, M.H.M.: Reliability evaluation of smart structural systems, *IMECE2005-79125, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2005.
- [43] Hassan, M.H.M.: A system model for reliability assessment of smart structural systems, *Structural Engineering and Mechanics*, 23(5):455–468, 2006.
- [44] Helton, J.C.: Uncertainty and sensitivity analysis techniques for use in performance assessment for radioactive waste disposal, *Reliability Engineering and System Safety*, 42:1–41, 1993.
- [45] Herold, S.; Mayer, D.; Hanselka, H.: Transient simulation of adaptive structures, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 15(3):215–224, 2004.
- [46] Homma, T.; Saltelli, A.: Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models, *Reliability Engineering and System Safety*, 52:1–17, 1996.
- [47] Hong, S.; Park, C.H.; Park, H.C.: Vibration control of beams using multiobjective state-feedback control, *Smart Materials and Structures*, 15(1):157–163, 2006.
- [48] Hora, S.C.; Iman, R.L.: A comparison of maximum/bounding and Bayesian/Monte Carlo for fault tree uncertainty analysis, Technischer Bericht SAND85-2839, Sandia National Laboratories, 1986.
- [49] Iman, R.L.; Hora, S.C.: A Robust Measure of Uncertainty Importance for Use in Fault Tree System Analysis, *Risk Analysis*, 10(3):401–406, 1990.
- [50] International Electrotechnical Organization: *IEC 60050-191-02-03 1990-12, AMD 1 1999-03, AMD 2 2002-01: Dependability and quality of service*, 2002.

- [51] Ishigami, T.; Homma, T.: An Importance Quantification Technique in Uncertainty Analysis for Computer Models, N.Y.I.C. Society (Herausgeber), *Proceedings of the ISUMA '90, First International Symposium on Uncertainty Modelling and Analysis, Univ. of Maryland, USA*, S. 398–403, 1990.
- [52] Jansen, M.J.: Analysis of variance designs for model output, *Computer Physics Communications*, 117(1-2):35–43, 1999.
- [53] Jeong, S.; Murayama, M.; Yamamoto, K.: Efficient Optimization Design Method Using Kriging Model, *Journal of Aircraft*, 42(5):0021–8669, 2005.
- [54] Jin, R.; Du, X.; Chen, W.: The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25(2):99–116, 2003.
- [55] Koda, M.; Mcrae, G.J.; Seinfeld, J.H.: Automatic sensitivity analysis of kinetic mechanisms, *International Journal of Chemical Kinetics*, 11(4):427–444, 1979.
- [56] Lemaire, M.: *Structural Reliability*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2009.
- [57] Levenberg, K.: A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, II(2):164–168, 1944.
- [58] Li, Y.; Pfeiffer, T.; Han, S.O.: Simulationsbasierte und experimentelle Sensitivitätsanalyse eines adaptiven Systems, 3. DVM Tagung AK Zuverlässigkeit mechatronischer und adaptronischer Systeme, 903, S. 21–30, 2010.
- [59] Liu, Q.; Homma, T.: A new computational method of a moment-independent uncertainty importance measure, *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1205–1211, 2009.
- [60] Liu, Q.; Homma, T.: A New Importance Measure for Sensitivity Analysis, *Journal of Nuclear Science and Technology*, 47(1):53–61, 2010.
- [61] Liu, X.; Begg, D.W.: Sensitivity analysis of smart structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):311–322, 1998.
- [62] Liu, X.; Begg, D.W.: Second-Order Sensitivity of Smart Structures, *Journal of Aerospace Engineering*, 12(1):15–22, 1999.
- [63] Mara, T.A.: Extension of the RBD-FAST method to the computation of global sensitivity indices, *Reliability Engineering & System Safety*, 94(8):1274–1281, 2009.
- [64] Marquardt, D.W.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [65] Marseguerra, M.; Zio, E.: *Basics of the Monte Carlo Method with Application to System Reliability*, LiLoLe-Verlag GmbH, 2002.
- [66] Matsumoto, M.; Nishimura, T.: Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator, *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1):3–30, 1998.
- [67] McKay, M.D.; Beckman, R.J.; Conover, W.J.: A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code, *Technometrics*, 21(2):239–245, 1979.
- [68] Melchers, R.E.: *Structural Reliability Analysis and Prediction*, John Wiley & Sons, 1999, 2. Auflage.

-
- [69] Montgomery, D.C.: *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, 2009, 7. Auflage.
- [70] Morris, M.D.: Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments, *Technometrics*, 33(2):161–174, 1991.
- [71] Most, T.; Bucher, C.: Stochastic simulation of cracking in concrete structures using multiparameter random fields, *International Journal of Reliability and Safety*, 1(1/2):168–186, 2006.
- [72] Papula, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3 - Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*, Vieweg + Teubner, 2008, 5. Auflage.
- [73] Park, C.H.: Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements, *Journal of Sound and Vibration*, 268(1):115–129, 2003.
- [74] Perry, M.A.; Bates, R.A.; Atherton, M.A.; Wynn, H.P.: A finite-element-based formulation for sensitivity studies of piezoelectric systems, *Smart Materials and Structures*, 17(1):015015 (7pp), 2008.
- [75] PI Ceramic: *Piezokeramische Materialien und Bauelemente*, 2004.
- [76] Pichler, L.; Pradlwarter, H.; Schuëller, G.: A mode-based meta-model for the frequency response functions of uncertain structural systems, *Computers & Structures*, 87(5-6):332–341, 2009.
- [77] Piefort, V.: *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*, Dissertation, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [78] Preumont, A.: *Vibration Control of Active Structures - An Introduction*, Kluwer Academic Publishers, 2002, 2. Auflage.
- [79] Puri, R.S.; Morrey, D.; Bell, A.J.; Durodola, J.F.; Rudnyi, E.B.; Korvink, J.G.: Reduced order fully coupled structural-acoustic analysis via implicit moment matching, *Applied Mathematical Modelling*, 33(11):4097–4119, 2009.
- [80] Reuter, U.; Liebscher, M.; Müllerschön, H.: Global Sensitivity Analysis in Structural Optimization, *7th European LS-DYNA Conference, Salzburg*, 2009.
- [81] Ross, S.M.: *Statistik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Elsevier Akademischer Verlag, 2006.
- [82] Rudnyi, E.; Korvink, J.: Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS, *Applied Parallel Computing*, Lecture Notes in Computer Science, Band 3732, S. 349–356, Springer, 2006.
- [83] Saltelli, A.; Tarantola, S.; Chan, K.P.S.: A Quantitative Model-Independent Method for Global Sensitivity Analysis of Model Output, *Technometrics*, 41(1):39–56, 1999.
- [84] Saltelli, A.: Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices, *Computer Physics Communications*, 145(2):280–297, 2002.
- [85] Saltelli, A.; Annoni, P.; Azzini, I.; Campolongo, F.; Ratto, M.; Tarantola, S.: Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index, *Computer Physics Communications*, 181(2):259–270, 2010.

- [86] Saltelli, A.; Bolado, R.: An alternative way to compute Fourier amplitude sensitivity test (FAST), *Computational Statistics & Data Analysis*, 26(4):445–460, 1998.
- [87] Saltelli, A.; Ratto, M.; Andres, T.; Campolongo, F.; Cariboni, J.; Gatelli, D.; Saisana, M.; Tarantola, S.: *Global Sensitivity Analysis*, John Wiley & Sons, 2008.
- [88] Schaibly, J.H.; Shuler, K.E.: Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. II Applications, *Journal of Chemical Physics*, 59(8):3879–3888, 1973.
- [89] Schnieder, E.; Schnieder, L.: Ein formalisiertes Begriffssystem zur Zuverlässigkeit, *Technische Zuverlässigkeit 2009*, VDI-Berichte 2065, S. 29–40, 2009.
- [90] Schwieger, V.: Sensitivity analysis as a general tool for model optimisation - examples for trajectory estimation, *Journal of Applied Geodesy*, 1(1):27–34, 2007.
- [91] Sedaghati, R.; Zabihollah, A.; Ahari, M.: Sensitivity Analysis and Optimal Design of Smart Piezolaminated Composite Beams, *AIAA Journal*, 44(12):2987–2996, 2006.
- [92] Shapiro, A.; Dentcheva, D.; Ruszczyński, A.: *Lectures on Stochastic Programming - Modeling and Theory*, SIAM, 2009.
- [93] Sobol', I.M.: On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(4):86–112, 1967.
- [94] Sobol', I.M.: On the Systematic Search in a Hypercube, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(5):790–793, 1979.
- [95] Sobol', I.M.: Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models, *Mathematical Modeling and Computational Experiment*, 1(4):407–414, 1993.
- [96] Sobol', I.M.: Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates, *Mathematics and Computers in Simulation*, 55(1-3):271–280, 2001.
- [97] Spencer, B.F.; Sain, M.K.; Kantor, J.C.; Montemagno, C.: Probabilistic stability measures for controlled structures subject to real parameter uncertainties, *Smart Materials and Structures*, 1(4):294–305, 1992.
- [98] Stander, N.; Roux, W.; Goel, T.; Eggleston, T.; Craig, K.: *LS-OPT User's Manual Version 4.1*, Livermore Software Technology Corporation, 2010.
- [99] Strambi, G.; Barboni, R.; Gaudenzi, P.: Pin-Force and Euler-Bernoulli Models for Analysis of Intelligent Structures, *AIAA Journal*, 33(9):1746–1749, 1995.
- [100] Tarantola, S.; Gatelli, D.; Mara, T.: Random balance designs for the estimation of first order global sensitivity indices, *Reliability Engineering & System Safety*, 91(6):717–727, 2006.
- [101] Turányi, T.: Review - Sensitivity Analysis of Complex Kinetic Systems. Tools and Applications, *Journal of Mathematical Chemistry*, 5:203–248, 1990.
- [102] Verein Deutscher Ingenieure: *VDI Richtlinie 4001 - Blatt 2: Terminologie der Zuverlässigkeit*, 2006.
- [103] Weyl, H.: Mean Motion, *American Journal of Mathematics*, 60(4):889–896, 1938.

- [104] Wolf, K.; Han, S.O.; Doll, T.; Kurtze, L.; Bein, T.; Hanselka, H.: Performance Assessment of an Active Noise Reduction System, *ASME ESDA Conference, ESDA2008-59555*, 2008.
- [105] Wolf, K.; Han, S.O.; Hanselka, H.: Sensitivity based performance evaluation and reliability assessment of adaptive systems, *Proceedings of SPIE Vol. 6928, 69281A*, 2008.
- [106] Zabihollah, A.; Ganesan, R.; Sedaghati, R.: Sensitivity analysis and design optimization of smart laminated beams using layerwise theory, *Smart Materials and Structures*, 15(6):1775–1784, 2006.
- [107] Zabihollah, A.; Sedaghati, R.; Ganesan, R.: Active vibration suppression of smart laminated beams using layerwise theory and an optimal control strategy, *Smart Materials and Structures*, 16(6):2190–2201, 2007.
- [108] Zaremba, S.K.: The Mathematical Basis of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods, *SIAM Review*, 10(3):303–314, 1968.
- [109] Zentner, I.; De Rocquigny, E.; Stoisser, C.: A Methodology for Treating Epistemic Uncertainties in Dynamic Response Analysis of Turboset, *Proceedings of the 2nd International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, S. 165–174, 2009.
- [110] Zio, E.; Apostolakis, G.E.: Sensitivity and uncertainty analysis within a methodology for evaluating environmental restoration technologies, *Computer Physics Communications*, 117(1-2):1–10, 1999.